詳細解答

STEP III 1995，第 6 題

純數學 • 軌跡與反演

> **STEP III 1995，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q6

關鍵思路

圓 $|z-\mathrm{i}|=1$ 通過原點，所以它的極式（polar form）方程特別簡單：模（modulus）是輻角（argument）的單一個三角函數。一旦把 z 寫成模—輻角形式，$1/z$ 便立即可得（取模的倒數，並把輻角變號），再把它寫成直角坐標形式（Cartesian form），便會發現這個圓變成了一條直線。最後一部分是同一現象的逆向版本，直接設 $w=x+\mathrm{i}y$ 來做最快捷。

解答

z 的模

設 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，其中 $r>0$。則 $z-\mathrm{i}=r\cos\theta+\mathrm{i}(r\sin\theta-1)$，所以

$$\begin{aligned}|z-\mathrm{i}|^2=1 &\iff r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta-2r\sin\theta+1=1\\ &\iff r^2-2r\sin\theta=0\\ &\iff r=2\sin\theta,\end{aligned}$$

其中最後一步除以 r，這是容許的，因為 $z\neq 0$。所以

$$|z|=2\sin\theta.$$

由於 $r>0$，必有 $\sin\theta>0$，即 $0<\theta<\pi$：這個圓（圓心 i，半徑 1）位於上半平面，只在原點與實軸相切，而原點已被排除。反過來，每一個 $\theta\in(0,\pi)$ 都給出圓上的一點 $z=2\sin\theta\,(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，所以當 θ 走遍 $(0,\pi)$ 時，z 描出除原點外的整個圓。

想一想 為甚麼從圖形來看，$|z| = 2\sin\theta$ 是「顯而易見」的？

由 0 至 2i 的線段是圓的一條直徑。根據半圓上的圓周角定理（angle in a semicircle），以 0、z、2i 為頂點的三角形在 z 處是直角，而在 0 處的角是 $\frac{\pi}{2} - \theta$。所以 $|z| = 2\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = 2\sin\theta$。

$1/z$ 的模和輻角

由於 $z = 2\sin\theta\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2\sin\theta}(\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)),$$

所以

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{2\sin\theta}, \qquad \arg\frac{1}{z} = -\theta.$$

因為 $0 < \theta < \pi$，角 $-\theta$ 位於 $(-\pi, 0)$ 之內，所以它就是輻角主值（principal argument）。

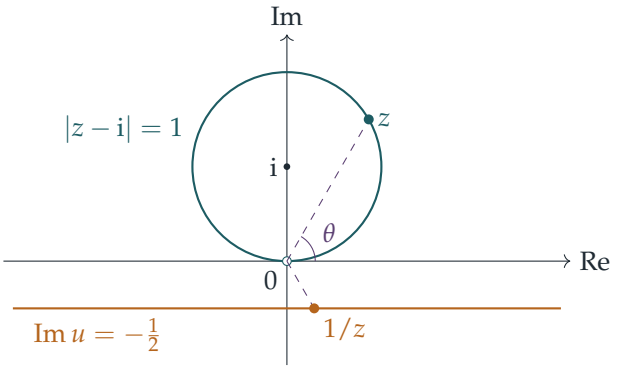
軌跡

要看出 $1/z$ 描出甚麼圖形，可把它轉為直角坐標形式：

$$\frac{1}{z} = \frac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{2\sin\theta} = \tfrac{1}{2}\cot\theta - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}.$$

虛部恆為 $-\frac{1}{2}$，而當 θ 走遍 $(0, \pi)$ 時，實部 $\frac{1}{2}\cot\theta$ 取遍每一個實數值恰好一次（它由 $+\infty$ 遞減至 $-\infty$）。所以 $1/z$ 描出整條直線 $\operatorname{Im} u = -\frac{1}{2}$。

因此 z 位於圓心為 i、半徑為 1 的圓上（原點除外），而 $1/z$ 位於通過 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$ 的水平線上。下圖畫出兩者，並標出 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 時的一對點：這時 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$，而 $1/z = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$。這兩點分別位於角度為 θ 和 $-\theta$ 的射線上，而它們與 0 的距離相乘得 1。當 z 趨近原點時，$1/z$ 沿着直線走向無窮遠；圓的最高點 $z = 2\mathrm{i}$ 則對應點 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，即直線上最接近原點的一點。



軌跡 C

設 $w = x + \mathrm{i}y \neq 0$（要 $1/w$ 存在，必須有 $w \neq 0$）。則

$$\frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}, \qquad \text{所以} \qquad \operatorname{Re}\frac{1}{w} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

因此，對於 $w \neq 0$，

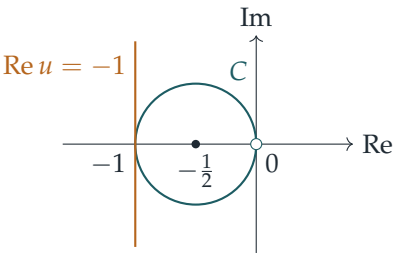
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\frac{1}{w} = -1 &\iff x = -(x^2 + y^2) \\ &\iff x^2 + x + y^2 = 0 \\ &\iff \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

每一步都是可逆的（我們乘以了 $x^2 + y^2$，而它不等於零），所以這是名副其實的「當且僅當」。因此 C 是圓

$$\left|w + \tfrac{1}{2}\right| = \tfrac{1}{2},$$

圓心為 $-\frac{1}{2}$，半徑為 $\frac{1}{2}$，但要除去原點。原點確實在這個圓上，但 $1/w$ 在該處沒有定義，所以它不屬於 C。

這與第一部分互相呼應：在那裏，一個通過 0 的圓被 $z \mapsto 1/z$ 映射到一條不通過 0 的直線；在這裏，直線 $\operatorname{Re} u = -1$ 被同一個映射（它是自己的逆映射）映射到一個通過 0 的圓。



驗算

- 取 $\theta = \frac{\pi}{6}$：則 $|z| = 1$ 且 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$，而確實有 $|z - \mathrm{i}| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right| = 1$。它的倒數就是它的共軛複數（conjugate），$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \approx 0.866 - 0.5\mathrm{i}$，其虛部為 $-\frac{1}{2}$，與預期相符。
- $\theta = \frac{\pi}{2}$ 給出 $z = 2\mathrm{i}$，即圓的最高點，而 $1/z = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$。
- 對於 C：$w = -1$ 在圓上，而 $1/w = -1$；$w = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ 在圓上，而 $1/w = -1 - \mathrm{i}$，實部為 -1。

在每條軌跡上各取 10 000 個隨機點作數值測試，三個結果全部得到確認。

常見錯誤

- 忘記範圍 $0 < \theta < \pi$：公式 $|z| = 2\sin\theta$ 只在 $\sin\theta > 0$ 時才有意義。
- 把 $1/z$ 的軌跡說成半直線或線段。由於 $\cot\theta$ 在 $(0, \pi)$ 上取遍所有實數值，軌跡是整條直線。
- 把原點算入 C。原點滿足圓的方程，但 $1/w$ 在該處並不存在。

STEP 之外

映射 $z \mapsto 1/z$ 是莫比烏斯變換（Möbius transformation）$z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ 的一個例子。這類映射的一個核心性質，是它們把「廣義圓」（圓和直線）映射到廣義圓，而通過原點的圓正正就是被 $1/z$ 映射到直線的那些圓。這是黎曼球面（Riemann sphere）幾何的起點；在黎曼球面上，直線只不過是通過無窮遠點的圓。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）配以圖像，把這一切闡述得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。