詳細解答

STEP III 1995，第 5 題

純數學 • 麥克勞林級數

> **STEP III 1995，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q5

關鍵思路

設 $\theta = \sin^{-1} x$，於是 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = 1/\sqrt{1-x^2}$。把 $y^{(1)}$ 乘以 $\sqrt{1-x^2}$，便可消去這個礙事的因子；再求導一次，就得到不含平方根的二階方程。接着用萊布尼茲法則（Leibniz's rule）把方程化為遞推關係（recurrence），而在 $x = 0$ 處，因子 $1 - x^2$ 變成 1，含 x 的項亦隨之消失。這樣，遞推關係便把 0 處的各階導數（derivative）全部交到我們手上。

解答

微分方程

設 $\theta = \sin^{-1} x$，則 $\sin\theta = x$，且當 $|x| < 1$ 時，$\cos\theta = \sqrt{1-x^2} > 0$，並有 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。於是 $y = \sin^2 m\theta$，由鏈式法則（chain rule）得

$$y^{(1)} = 2m \sin m\theta \cos m\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m \sin 2m\theta}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{1-x^2}\, y^{(1)} = m \sin 2m\theta.$$

把上式對 x 求導，左邊用積法則（product rule）：

$$\sqrt{1-x^2}\, y^{(2)} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, y^{(1)} = 2m^2 \cos 2m\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

全式乘以 $\sqrt{1-x^2}$，並利用 $\cos 2m\theta = 1 - 2\sin^2 m\theta = 1 - 2y$：

$$(1-x^2)\, y^{(2)} = x\, y^{(1)} + 2m^2(1-2y),$$

這就是所求的方程。

想一想 為甚麼不先把 $\sqrt{1-x^2}\,y^{(1)} = m\sin 2m\theta$ 兩邊平方？

平方後得 $(1-x^2)(y^{(1)})^2 = 4m^2y(1-y)$，再求導的話，每一項都會帶着因子 $2y^{(1)}$。這樣我們就要除以 $y^{(1)}$，而它在 $x=0$ 處等於零，偏偏那正是我們稍後最關心的一點。先求導而不先平方，就完全不必做這個除法。

遞推關係

利用萊布尼茲法則，把方程求導 n 次，其中 $n \geq 1$。由於 $1-x^2$ 只有兩個非零的導數（$-2x$ 和 -2），而 x 只有一個，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)y^{(2)}\right] &= (1-x^2)y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)\,y^{(n)},\\
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x\,y^{(1)}\right] &= x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)},\\
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[2m^2(1-2y)\right] &= -4m^2\,y^{(n)}.
\end{aligned}$$

最後一行需要 $n \geq 1$，因為只有這樣，常數 $2m^2$ 求導後才會變成零。令兩邊相等，

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} = x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)} - 4m^2y^{(n)},$$

再合併同類項（共有 $2n+1$ 個 $xy^{(n+1)}$，以及 $n(n-1)+n = n^2$），得

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} = (2n+1)\,x\,y^{(n+1)} + (n^2-4m^2)\,y^{(n)} \qquad (n \geq 1),$$

正如所求。

麥克勞林級數

在 $x=0$ 處有 $\theta = 0$，所以

$$y(0) = \sin^2 0 = 0, \qquad y^{(1)}(0) = m\sin 0 = 0, \qquad y^{(2)}(0) = 0 + 2m^2(1-0) = 2m^2,$$

其中最後一個由微分方程得出。在遞推關係中代入 $x=0$，得

$$y^{(n+2)}(0) = (n^2-4m^2)\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 1).$$

奇數階導數。由於 $y^{(1)}(0) = 0$，遞推關係給出 $y^{(3)}(0) = 0$，繼而 $y^{(5)}(0) = 0$，如此類推：所有奇數階導數在 0 處都等於零。這是合理的，因為 y 是 x 的偶函數（even function）。

偶數階導數。取 $n = 2j$：

$$y^{(2j+2)}(0) = (4j^2-4m^2)\,y^{(2j)}(0) = -4(m^2-j^2)\,y^{(2j)}(0) \qquad (j \geq 1).$$

由 $y^{(2)}(0) = 2m^2$ 出發，依次對 $j = 1, 2, \ldots, k-1$ 應用上式，

$$y^{(2k)}(0) = 2m^2 \prod_{j=1}^{k-1}(-4(m^2 - j^2)) = (-1)^{k-1}\, 2^{2k-1} \prod_{j=0}^{k-1}(m^2 - j^2),$$

這裏我們把最前面的 m^2 併入乘積，作為 $j = 0$ 的因子。（當 $k = 1$ 時，公式給出 $2m^2$，與應有的結果相符。）

因此麥克勞林級數（Maclaurin series）為

$$y = \sin^2(m \sin^{-1} x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\, 2^{2k-1}}{(2k)!}\, m^2(m^2 - 1^2)(m^2 - 2^2) \cdots (m^2 - (k-1)^2)\, x^{2k},$$

其首數項為

$$y = m^2 x^2 - \frac{m^2(m^2-1)}{3}\, x^4 + \frac{2m^2(m^2-1)(m^2-4)}{45}\, x^6 - \cdots.$$

若 m 是整數，則凡 $k > |m|$ 的項都含有因子 $m^2 - m^2 = 0$，所以級數到此為止，y 是一個 $2|m|$ 次多項式。

驗算

- $m = 1$：$y = \sin^2(\sin^{-1} x) = x^2$，而級數給出 x^2，其後各項全為零。$m = 2$：級數給出 $4x^2 - 4x^4$，而確實有 $\sin^2 2\theta = 4\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) = 4x^2 - 4x^4$。
- $m = \frac{1}{2}$，$x = \frac{1}{2}$：$y = \sin^2(\pi/12) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0.066987$。級數為 $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{32}x^6 + \cdots$，其首三項之和為 0.066895，多加幾項，差距便會逐漸縮小。
- 我們以數值方法驗證過：微分方程在隨機選取的 x 和 m 上成立；級數的係數精確地滿足該方程；以及當 $|x| \le 0.8$ 時，級數（取至 300 項）與 y 相符，誤差約為 10^{-15}。

常見錯誤

- 在 $n = 0$ 時使用遞推關係。它只對 $n \ge 1$ 成立，因為 $n = 0$ 時常數 $2m^2$ 不會消失。$n = 0$ 的情況就是原來的方程，我們正是由它得出 $y^{(2)}(0) = 2m^2$。
- 弄錯萊布尼茲法則的係數：$-n(n-1)y^{(n)}$ 這一項來自 $\binom{n}{2} \cdot (-2)$，而不是 $\binom{n}{2} \cdot (-2x)$。
- 寫通項時漏掉正負交替的符號。每一步都乘以 $4(j^2 - m^2)$，而當 $m^2 > j^2$ 時這是負數。

STEP 之外

由導數砌出來的麥克勞林級數，未必等於原來的函數，但在這裏，當 $|x| < 1$ 時兩者確實相等。這個級數的收斂半徑（radius of convergence）為 1（當 m 不是整數時，可用比值審斂法（ratio test）得出），而 $\sin^{-1} x$ 到了 $x = \pm 1$ 就不再性質良好。m 為整數時所得的多項式，是切比雪夫多項式（Chebyshev polynomials）的近親，因為 $\cos 2m\theta$ 是 $\sin\theta$ 的多項式。想知道這類級數為何真的收斂到原來的函數，可閱讀 Abbott 的 *Understanding Analysis* 中關於帶餘項的泰勒定理（Taylor's theorem with remainder）的部分。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 則解釋了為何收斂半徑取決於 ± 1 處的毛病。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。