詳細解答

STEP III 1995，第 4 題

純數學 • 三角級數求和

> **STEP III 1995，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q4

關鍵思路

餘弦之和是複指數（complex exponential）之和的實部（real part），而 $\sum e^{\mathrm{i}k\theta}$ 是一個等比級數（geometric series）。先把它求和，再從分子和分母各抽出一個「半角」（half-angle）因子 $e^{\mathrm{i}\theta/2}$，就能把難以處理的 $e^{\mathrm{i}m\theta}-1$ 項化為正弦，分母中的 $\sin(\frac{1}{2}\theta)$ 正是由此而來。至於不等式，訣竅是改寫 $\mathrm{C}_n(\theta)$，使 $\frac{1}{2}$ 明顯地分離出來。

解答

和式 C_n 與 S_n

設 $z=e^{\mathrm{i}\theta}$。由於 $0<\theta<2\pi$，我們有 $z\neq 1$，故等比級數求和公式適用：

$$\mathrm{C}_n(\theta)+\mathrm{i}\,\mathrm{S}_n(\theta)=\sum_{k=0}^{n}e^{\mathrm{i}k\theta}=\frac{e^{\mathrm{i}(n+1)\theta}-1}{e^{\mathrm{i}\theta}-1}.$$

現在把 $e^{\mathrm{i}\phi}-1=e^{\mathrm{i}\phi/2}(e^{\mathrm{i}\phi/2}-e^{-\mathrm{i}\phi/2})=2\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\phi/2}\sin(\frac{1}{2}\phi)$ 用於分子（取 $\phi=(n+1)\theta$）和分母（取 $\phi=\theta$）：

$$\mathrm{C}_n(\theta)+\mathrm{i}\,\mathrm{S}_n(\theta)=\frac{2\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}(n+1)\theta/2}\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{2\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\theta/2}\sin(\frac{1}{2}\theta)}=e^{\mathrm{i}n\theta/2}\,\frac{\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

因為 $0<\frac{1}{2}\theta<\pi$，分母不為零。這個分數是實數，所以取實部和虛部（利用 $e^{\mathrm{i}n\theta/2}=\cos\frac{1}{2}n\theta+\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}n\theta$）便得

$$\mathrm{C}_n(\theta)=\frac{\cos(\frac{1}{2}n\theta)\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)},\qquad \mathrm{S}_n(\theta)=\frac{\sin(\frac{1}{2}n\theta)\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

第一式就是題目要求的結果，第二式則是 S_n 的相應表達式。

想一想 有沒有不用複數也能看出這個結果的方法？

有：把每一項乘以 $2\sin(\frac{1}{2}\theta)$，再用積化和差公式（product-to-sum formula）

$$2\sin(\tfrac{1}{2}\theta)\cos k\theta = \sin((k+\tfrac{1}{2})\theta) - \sin((k-\tfrac{1}{2})\theta).$$

由 $k=0$ 加到 n，各項裂項相消（telescope），只剩下最後一項和最初一項：

$$2\sin(\tfrac{1}{2}\theta)\,\mathrm{C}_n(\theta) = \sin((n+\tfrac{1}{2})\theta) - \sin(-\tfrac{1}{2}\theta) = \sin((n+\tfrac{1}{2})\theta) + \sin(\tfrac{1}{2}\theta). \qquad (*)$$

根據和差化積公式（sum-to-product formula）$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$，取 $A = (n+\frac{1}{2})\theta$，$B = \frac{1}{2}\theta$，右邊等於 $2\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)\cos(\frac{1}{2}n\theta)$，與上面求得的結果一致。

不等式

式 $(*)$ 正是我們想要的形式。兩邊除以 $2\sin(\frac{1}{2}\theta) \neq 0$，得

$$\mathrm{C}_n(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

（若改由題目給出的公式出發，可用 $2\cos(\frac{1}{2}n\theta)\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta) = \sin((n+\frac{1}{2})\theta) + \sin(\frac{1}{2}\theta)$ 得到同一行。）因此

$$\left|\mathrm{C}_n(\theta) - \frac{1}{2}\right| = \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})\theta)|}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)} \leq \frac{1}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)},$$

其中我們用到了當 $0 < \theta < 2\pi$ 時 $\sin(\frac{1}{2}\theta) > 0$（所以分母不需要加上模（modulus）號），以及 $|\sin x| \leq 1$。這就是所求的不等式，而等號成立當且僅當 $\sin((n+\frac{1}{2})\theta) = \pm 1$。

想一想 為甚麼 $\sin(\frac{1}{2}\theta)$ 為正這一點很重要？

假如容許 θ 取 $(0, 2\pi)$ 以外的值，$\sin(\frac{1}{2}\theta)$ 便可能是負數，不等式的右邊也會變成負數，而模不可能小於負數。在題目給定的範圍內，$\frac{1}{2}\theta \in (0, \pi)$，所以這個上界確實是一個正數。

驗算

- $n = 1$：$\mathrm{C}_1 = 1 + \cos\theta = 2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)$，而公式給出 $\cos(\frac{1}{2}\theta)\sin\theta / \sin(\frac{1}{2}\theta) = 2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)$。同樣，$\mathrm{S}_1 = \sin\theta$ 與 $\sin(\frac{1}{2}\theta)\sin\theta/\sin(\frac{1}{2}\theta)$ 相符。
- 當 $\theta \to 0$ 時，C_n 的公式趨向 $(n+1)$，正是 $n+1$ 個一之和；上界 $1/(2\sin\frac{1}{2}\theta)$ 則趨向無窮大，這是必然的。

- 數值驗算，取 $n=3$，$\theta=1$：直接求和得 $\mathrm{C}_3(1)\approx 0.1342$，與公式相符，而且 $|\mathrm{C}_3-\frac{1}{2}|\approx 0.366\le 1/(2\sin\frac{1}{2})\approx 1.043$。等號成立的例子有 $n=2$，$\theta=\pi/5$，此時兩邊都等於 $1.618\ldots$。

常見錯誤

- 忘記和式由 $k=0$ 開始，所以共有 $n+1$ 項：等比級數的分子是 $e^{\mathrm{i}(n+1)\theta}$，而不是 $e^{\mathrm{i}n\theta}$。
- 沒有先把分母化為實數，就對 $\left(e^{\mathrm{i}(n+1)\theta}-1\right)/\left(e^{\mathrm{i}\theta}-1\right)$ 取實部；半角因式分解能乾淨利落地做到這一點。
- 寫下 $|\sin(\frac{1}{2}\theta)|$，卻沒有說明它為何等於 $\sin(\frac{1}{2}\theta)$。

STEP 之外

函數 $\mathrm{C}_n(\theta)-\frac{1}{2}=\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)/\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)$ 除了相差一個常數因子外，就是狄利克雷核（Dirichlet kernel），它是傅立葉級數（Fourier series）理論的核心對象：一個函數的第 n 個傅立葉部分和，就是該函數對這個核取的平均。這裏證明的上界，加上分子的振盪，是證明傅立葉級數何時收斂的起點（也是用於 $\sum\cos(k\theta)/k$ 這類級數的狄利克雷判別法（Dirichlet's test）的起點）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 有一章講傅立葉級數，寫得淺白易讀，用的正是這些和式。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。