詳細解答

STEP III 1995，第 3 題

純數學 • 阻尼諧運動

> **STEP III 1995，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q3

關鍵思路

試代入 $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$：微分方程（differential equation）便化為一條關於 λ 的二次方程，而題目的三種情況，正好對應其判別式（discriminant）的三種可能（兩個相異實根、一個重根、複數根）。在有阻尼而仍然振盪的情況下，駐點（stationary point）每隔半個周期出現一次，時間間隔相等；每經過這樣的一段時間，振盪因子只是變號，而指數因子則按相同的比例縮小。這就是相繼極值之比為常數的原因。

解答

代入 $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$，得輔助方程（auxiliary equation）

$$\lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0, \qquad \lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - 1}.$$

以下 A 和 B 均為任意常數。

第 (i) 部分：$k > 1$

兩根為相異實數，故

$$x = A\,\mathrm{e}^{(-k+\sqrt{k^2-1})\,t} + B\,\mathrm{e}^{(-k-\sqrt{k^2-1})\,t}.$$

（由於 $\sqrt{k^2-1} < k$，兩個指數均為負數：這是過阻尼（overdamping），沒有振盪。）

第 (ii) 部分：$k = 1$

輔助方程為 $(\lambda+1)^2 = 0$，有重根（repeated root）$\lambda = -1$。第二個獨立解是 $t\,\mathrm{e}^{-t}$，故

$$x = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

（驗證：若 $x = te^{-t}$，則 $x' = (1-t)e^{-t}$ 及 $x'' = (t-2)e^{-t}$，而 $(t-2)+2(1-t)+t = 0$。）

第 (iii) 部分：$0 < k < 1$

此時 $k^2 - 1 < 0$，故兩根為 $\lambda = -k \pm i\omega$，其中

$$\omega = \sqrt{1-k^2} > 0.$$

取 $e^{(-k\pm i\omega)t}$ 的實組合，得

$$x = e^{-kt}(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

相繼的極值

由 $x(0) = 0$ 得 $A = 0$，故 $x = Be^{-kt}\sin\omega t$，且 $B \neq 0$（否則 $x \equiv 0$，沒有極大值或極小值可言）。求導得

$$\frac{dx}{dt} = Be^{-kt}(\omega\cos\omega t - k\sin\omega t).$$

由於 $k^2 + \omega^2 = 1$，可設 $k = \sin\varphi$、$\omega = \cos\varphi$，其中 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$，於是

$$\omega\cos\omega t - k\sin\omega t = \cos(\omega t + \varphi).$$

因此 $\dfrac{dx}{dt} = Be^{-kt}\cos(\omega t + \varphi)$，它等於零當且僅當 $\omega t + \varphi$ 是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇數倍，並且在每個這樣的時刻都會變號。所以（在 $t > 0$ 時）駐點位於

$$t_n = t_1 + \frac{(n-1)\pi}{\omega}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

彼此相隔 π/ω，間距相等；又因為 dx/dt 在每個駐點都變號，它們確實是極大值與極小值交替出現。

想一想 不必明確求出 t_1，怎樣比較 $x(t_{n+1})$ 與 $x(t_n)$？

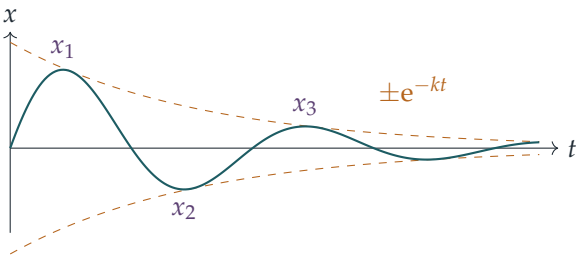
時間推前 π/ω，ωt 便增加 π，而 $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$。所以

$$x_{n+1} = Be^{-k(t_n+\pi/\omega)}\sin(\omega t_n + \pi) = -e^{-k\pi/\omega}\,Be^{-kt_n}\sin\omega t_n = -e^{-k\pi/\omega}\,x_n.$$

此外 $x_n \neq 0$，因為若 $\sin\omega t_n = 0$，則必有 $\cos\omega t_n = \pm 1$，於是 $dx/dt = \pm B\omega e^{-kt_n} \neq 0$。因此

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \alpha, \qquad \text{其中} \alpha = e^{-k\pi/\omega} = \exp\left(-\frac{k\pi}{\sqrt{1-k^2}}\right),$$

此值與 n 無關，正是所要證明的結果。（式中的負號印證了極大值與極小值交替出現。）



k^2 的公式

取對數，得 $\ln\alpha = -\dfrac{k\pi}{\sqrt{1-k^2}}$，故

$$(\ln\alpha)^2 = \frac{k^2\pi^2}{1-k^2} \implies (\ln\alpha)^2 - k^2(\ln\alpha)^2 = k^2\pi^2 \implies k^2 = \frac{(\ln\alpha)^2}{\pi^2 + (\ln\alpha)^2},$$

這就是所求的結果。

驗算

- 當 $k \to 0$（沒有阻尼）時，$\alpha \to 1$ 而 $\ln\alpha \to 0$，公式給出 $k^2 \to 0$，與預期相符：各個極值的大小全都相同。
- 當 $k \to 1^-$ 時，$\alpha \to 0$ 而 $(\ln\alpha)^2 \to \infty$，故 $k^2 \to 1$：在臨界阻尼（critical damping）下，運動不再往回擺動。
- 數值上，取 $k = 0.5$ 及 $x(0) = 0$，把方程逐步向前數值求解，得出相繼極值之比為 0.163034，與 $e^{-0.5\pi/\sqrt{0.75}} \approx 0.163034$ 吻合；而且 $(\ln\alpha)^2/(\pi^2 + (\ln\alpha)^2) = 0.25 = k^2$。

常見錯誤

- 把一個極大值與下一個極小值之間的時間當作一整個周期 $2\pi/\omega$，而不是半個周期 π/ω；這樣會得出 α^2 而不是 α。
- 以為極值出現在 $\sin\omega t = \pm 1$ 之處。其實不然：衰減因子令極值提早出現，移到 $\tan\omega t = \omega/k$ 之處。上面的論證自始至終不需要知道極值的確切位置，只需要知道它們的間距。

STEP 之外

$-\ln\alpha$ 這個量稱為對數衰減率（logarithmic decrement）：工程師從記錄下來的振盪中量度它，再用本題的公式把它換算成阻尼 k。Boyce 與 DiPrima 所著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）詳細討論了過阻尼、臨界阻尼和欠阻尼三種情況。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。