詳細解答

STEP III 1995，第 2 題

純數學 • 歸約公式

> **STEP III 1995，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q2

關鍵思路

因子 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{a-x}$ 都提示我們使用代換（substitution）$x = a\sin^2\theta$，這樣兩者會同時化為 $\sqrt{a}\sin\theta$ 和 $\sqrt{a}\cos\theta$。（求 I_0 還有一條巧妙的幾何捷徑。）至於歸約公式（reduction formula），可用分部積分法（integration by parts），使 x 的冪次降一。這時 $a-x$ 的冪次會升一，我們再利用 $a-x$ 把多出的一個因子拆開。這樣便會重新得到 I_n 本身，於是可以合併同類項。

全題設 $a > 0$。

解答

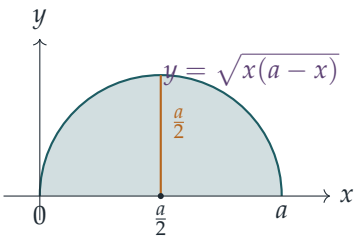
求 I_0

我們要求 $\mathrm{I}_0 = \int_0^a x^{1/2}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x$。設 $x = a\sin^2\theta$，則 $\mathrm{d}x = 2a\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$。當 x 由 0 變到 a 時，θ 由 0 變到 $\frac{\pi}{2}$，而在這個範圍內 $\sin\theta, \cos\theta \geq 0$。所以 $\sqrt{x} = \sqrt{a}\sin\theta$ 及 $\sqrt{a-x} = \sqrt{a}\cos\theta$，不會有正負號的問題。於是

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_0 &= \int_0^{\pi/2} (\sqrt{a}\sin\theta)(\sqrt{a}\cos\theta)\,2a\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2a^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{8},\end{aligned}$$

這正是所求的結果。這裏用到了 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ 和 $\sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)$，而 $\cos 4\theta$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的積分為零。

一幅圖。若 $y = \sqrt{x(a-x)}$，則 $y^2 = ax - x^2$，整理後得 $(x-\frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$，其中 $y \geq 0$。所以 I_0 就是半徑為 $\frac{a}{2}$ 的半圓的面積，即 $\frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi a^2}{8}$。



歸約公式

取 $n \geq 1$。以 $u = x^{n+\frac{1}{2}}$ 和 $\mathrm{d}v = (a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x$ 作分部積分。則 $\mathrm{d}u = (n+\frac{1}{2})x^{n-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$ 及 $v = -\frac{2}{3}(a-x)^{3/2}$。由此得

$$\mathrm{I}_n = \left[-\tfrac{2}{3}x^{n+\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\right]_0^a + \frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x.$$

邊界項在兩端都等於零：在 $x = a$ 處是因為有因子 $(a-x)^{3/2}$，在 $x = 0$ 處則是因為有 $x^{n+\frac{1}{2}}$。留意 $\frac{2}{3}(n+\frac{1}{2}) = \frac{2n+1}{3}$。

想一想 新的積分含有 $(a-x)^{3/2}$，並不是 I_{n-1} 的形式。我們該怎樣處理它？

把它寫成 $(a-x)^{3/2} = (a-x)\,(a-x)^{1/2}$，然後展開第一個因子：

$$\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = a\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x - \int_0^a x^{n+\frac{1}{2}}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x = a\,\mathrm{I}_{n-1} - \mathrm{I}_n.$$

所以

$$\mathrm{I}_n = \frac{2n+1}{3}(a\,\mathrm{I}_{n-1} - \mathrm{I}_n) \quad\Longrightarrow\quad (2n+4)\,\mathrm{I}_n = (2n+1)\,a\,\mathrm{I}_{n-1},$$

這是兩邊乘以 3 再合併 I_n 各項後所得的（$3 + 2n + 1 = 2n + 4$）。這就是所求的結果。

計算 I_n

依次對 $k = n, n-1, \ldots, 1$ 應用 $\mathrm{I}_k = \dfrac{(2k+1)a}{2k+4}\,\mathrm{I}_{k-1}$，最後到達 I_0，得

$$\mathrm{I}_n = a^n\,\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k+4)}\cdot\frac{\pi a^2}{8}.$$

現在整理這兩個乘積。分子是奇數的乘積 $3\cdot 5\cdots(2n+1)$。我們補上缺少的偶數 $2\cdot 4\cdots(2n) = 2^n n!$，得

$$\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\,n!}.$$

分母是 $\prod_{k=1}^{n} 2(k+2) = 2^n\cdot 3\cdot 4\cdots(n+2) = 2^n\,\dfrac{(n+2)!}{2}$。因此

$$\mathrm{I}_n = \frac{\pi a^{n+2}}{8}\cdot\frac{(2n+1)!}{2^n\,n!}\cdot\frac{2}{2^n\,(n+2)!} = \boxed{\frac{\pi\,a^{n+2}\,(2n+1)!}{4^{n+1}\,n!\,(n+2)!}}$$

當 $n = 0$ 時，這個公式同樣給出正確的值 $\frac{\pi a^2}{8}$。

驗算

- $n = 1$：遞推關係（recurrence）給出 $6\mathrm{I}_1 = 3a\mathrm{I}_0$，所以 $\mathrm{I}_1 = \frac{\pi a^3}{16}$。公式則給出 $\pi a^3 \cdot 3!/(16 \cdot 1! \cdot 3!) = \frac{\pi a^3}{16}$，兩者吻合。
- 對稱性：把 x 換成 $a - x$，可見 $\mathrm{I}_1 = \int_0^a x^{1/2}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x$ 亦成立。把兩個表達式相加，得 $2\mathrm{I}_1 = a\mathrm{I}_0$，這就獨立地驗證了 $\mathrm{I}_1 = \frac{\pi a^3}{16}$。
- 取 $a = 1$ 作數值計算，用森遜法則（Simpson's rule）或中點法則作數值積分，得 $\mathrm{I}_0 \approx 0.392699 = \pi/8$ 及 $\mathrm{I}_3 \approx 0.085903$。公式給出 $\pi \cdot 7!/(4^4 \cdot 3! \cdot 5!) = 35\pi/1280 \approx 0.085903$。

常見錯誤

- 弄錯 v 的正負號：$\int (a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}(a-x)^{3/2}$，其中的負號來自鏈式法則（chain rule）。
- 一心想直接得出 I_{n-1}，卻沒有留意到 I_n 在右邊再次出現，必須把它合併。
- 在 $3 \cdot 4 \cdots (n+2) = (n+2)!/2$ 中漏掉因子 2。

STEP 之外

這些積分都是貝塔函數（Beta function）$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$ 的特殊情況。代入 $x = at$ 可得 $\mathrm{I}_n = a^{n+2}B\left(n+\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$。我們證明的遞推關係，正是恆等式 $B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$ 的一個特例。在大學一年級的課程中，你會遇到公式 $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$，它解釋了 π 的來歷：$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 一書中，還有更多這類風格的歸約公式題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。