詳細解答

STEP III 1995，第 14 題

概率與統計 • 矩生成函數

> **STEP III 1995，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q14

關鍵思路

矩母函數（moment generating function，簡稱 MGF）能把獨立隨機變量（independent random variables）之和化為乘積：若 T_1 與 T_2 獨立，則 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta(T_1+T_2)}] = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta T_1}]\,\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta T_2}]$。因此我們先求出一個 MGF，把它自乘若干次，再認出所得結果正是同一族中某個密度函數（density）的 MGF。由於 MGF 決定其分佈，認出它便已足夠。

解答

T 的 MGF

對實數 θ，

$$M_T(\theta) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta T}] = \int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-(1-\theta)t}\,\mathrm{d}t.$$

這個積分只在 $\theta < 1$ 時收斂（否則被積函數不趨向 0），所以下文一律假設 $\theta < 1$。我們會反覆用到以下積分：

$$\int_0^\infty t^k \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} \qquad (\lambda > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

這可由分部積分法（integration by parts）連做 k 次得出（或代入 $s = \lambda t$，再利用 $\int_0^\infty s^k \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = k!$）。取 $k = 1$ 及 $\lambda = 1 - \theta > 0$，得

$$\boxed{M_T(\theta) = \frac{1}{(1-\theta)^2}}, \qquad \theta < 1.$$

簡單核對一下：$M_T(0) = 1$，這是每個 MGF 都必須滿足的。

U 的 MGF

設 T_1 和 T_2 為做這兩題所用的時間，則 $U = T_1 + T_2$，其中 T_1 和 T_2 的密度函數均為 f，而且互相獨立（題目已說明）。於是 $\mathrm{e}^{\theta T_1}$ 與 $\mathrm{e}^{\theta T_2}$ 亦互相獨立，所以它們乘積的期望值（expectation）等於各自期望值的乘積：

$$M_U(\theta) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta T_1}\mathrm{e}^{\theta T_2}] = M_T(\theta)^2 = \frac{1}{(1-\theta)^4}, \qquad \theta < 1.$$

U 的密度函數

現在計算題目所給的密度函數 $\mathrm{g}(u) = \frac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}$ 的 MGF。在上述積分中取 $k = 3$ 及 $\lambda = 1-\theta$，

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\theta u}\,\tfrac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\cdot\frac{3!}{(1-\theta)^4} = \frac{1}{(1-\theta)^4}.$$

（取 $\theta = 0$ 可確認 g 的積分為 1，所以它確實是一個密度函數。）

> **想一想** 我們已證明 g 與 U 有相同的 MGF。為甚麼這就表示 U 的密度函數是 g？

這裏用到 MGF 的唯一性定理（uniqueness theorem）：若兩個隨機變量的 MGF 在包含 $\theta = 0$ 的某個開區間上存在而且相等，則兩者有相同的分佈。這裏兩個 MGF 對所有 $\theta < 1$ 都相等，當中包括區間 $(-1, 1)$。所以 U 的密度函數為

$$\mathrm{g}(u) = \frac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}, \qquad u \geq 0,$$

正如題目所求。

如果你不想使用唯一性定理，卷積（convolution）公式可直接給出同一結果。由於 $T_1, T_2 \geq 0$，對 $u \geq 0$，

$$\begin{aligned}\mathrm{g}(u) &= \int_0^u \mathrm{f}(s)\,\mathrm{f}(u-s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-u}\int_0^u s(u-s)\,\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{-u}\left[\tfrac{1}{2}us^2 - \tfrac{1}{3}s^3\right]_0^u = \frac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}.\end{aligned}$$

做 n 題所用的總時間

設 $U_n = T_1 + \cdots + T_n$，其中各 T_i 互相獨立，密度函數均為 f。同樣的乘積論證給出

$$M_{U_n}(\theta) = M_T(\theta)^n = \frac{1}{(1-\theta)^{2n}}, \qquad \theta < 1.$$

由 $n = 2$ 的規律可以猜想密度函數為 $\mathrm{h}_n(u) = c\,u^{2n-1}\mathrm{e}^{-u}$。利用上述積分並取 $k = 2n-1$，它的 MGF 是 $c\,(2n-1)!/(1-\theta)^{2n}$。這恰好在 $c = 1/(2n-1)!$ 時等於 M_{U_n}。再次根

據唯一性，做 n 題所用的總時間的密度函數為

$$\boxed{\mathrm{h}_n(u) = \frac{u^{2n-1}\mathrm{e}^{-u}}{(2n-1)!}, \qquad u \geq 0.}$$

當 $n = 1$ 時這就是 f，當 $n = 2$ 時這就是 g，與預期一致。

驗算

- $\mathrm{E}[T] = M_T'(0) = 2$，與 $\int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2$ 吻合。所以 $\mathrm{E}[U_n] = 2n$。由 h_n 亦得出同一數值：$\int_0^\infty u^{2n}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u/(2n-1)! = (2n)!/(2n-1)! = 2n$。
- 數值上，用森遜法則（Simpson's rule）可得 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{0.5t}\,t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 4.000$，與 $1/(1-0.5)^2$ 吻合。模擬 2×10^5 次，每次從 f 抽取三個時間並求和，得出 $\mathrm{P}(U_3 \leq 5) \approx 0.386$，而由 h_3 算得 $\int_0^5 u^5\mathrm{e}^{-u}/120\,\mathrm{d}u \approx 0.384$。

常見錯誤

- 忘記 $\theta < 1$ 這個限制：當 $\theta \geq 1$ 時 MGF 並不存在。
- 把 MGF 相加而不是相乘。U 的 MGF 是 $M_T(\theta)^2$，而不是 $2M_T(\theta)$。（$2T$ 的 MGF 則是 $M_T(2\theta)$，又是另一回事。）
- 弄錯歸一化常數（normalising constant）中的階乘。u 的冪是 $2n-1$，所以常數是 $1/(2n-1)!$，而不是 $1/(2n)!$。

STEP 之外

密度函數 $t\mathrm{e}^{-t}$ 是形狀參數（shape）為 2、速率參數（rate）為 1 的伽瑪分佈（gamma distribution），而 h_n 則是形狀參數為 $2n$ 的伽瑪分佈。這道題說明：速率相同的獨立伽瑪變量相加時，形狀參數亦相加。特別地，每個 T 的表現就如兩個獨立指數分佈（exponential）時間之和，而伽瑪分佈正是這樣作為泊松過程（Poisson process）中第 k 個事件的等候時間而出現的。在大學裏，你會遇到特徵函數（characteristic function）$\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}]$，它必定存在，並可用來證明中心極限定理（central limit theorem）。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）對母函數（generating functions）及這些概念有清晰的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。