詳細解答

STEP III 1995，第 12 題

概率與統計 • 徑向對稱密度函數

> **STEP III 1995，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q12

本題在 *Beyond STEP* 第 12.22 節沒有平均值的分佈中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/cauchy.html

關鍵思路

徑向對稱（radially symmetrical）的密度只透過與原點的距離 $r = \sqrt{u^2+v^2}$ 而取決於 (u,v)，所以繞原點作任何旋轉之後，它看起來都一樣。特別地，點落在以原點為頂點的扇形內的概率，只取決於該扇形的角度。事件 $U/V < k$ 是由直線 $u = kv$ 與 u 軸割出的一對相對的扇形，所以它的概率不過是一個角度除以 2π。

解答

聯合密度與徑向對稱

X 和 Y 各自的密度為 $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}$。由於 X 與 Y 獨立（independent），它們的聯合密度（joint density）是邊際密度（marginal density）的乘積：

$$\mathrm{f}(x,y) = \phi(x)\,\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},$$

對所有實數 x 和 y 成立，這正是所求。

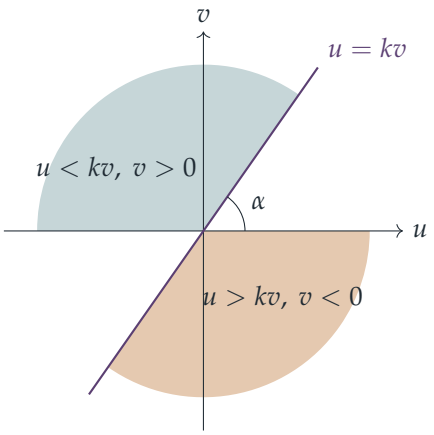
說這個密度是*徑向對稱*的，意思是它在點 (x,y) 的值只取決於該點與原點的距離 $r = \sqrt{x^2+y^2}$，而與該點的方向無關。這裏 $\mathrm{f}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-r^2/2}$。換一個等價的說法：把平面繞原點作任何旋轉，密度都不變，而它的等高線是以原點為圓心的圓。

關於 $\mathrm{P}(U/V < k)$ 的恆等式

設 U 和 V 具有徑向對稱的聯合密度 $h(u,v) = \rho\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$。直線 $v = 0$ 的概率為零（它的面積為零），所以我們可以不理會 $V = 0$ 的情況。把不等式 $U/V < k$ 乘以 V，並在 $V < 0$ 時把不等號反轉，得

$$\left\{\frac{U}{V} < k\right\} = \{U < kV,\ V > 0\} \cup \{U > kV,\ V < 0\},$$

而右邊的兩個事件是互斥（disjoint）的。



如圖所示（圖中取 $k > 0$），通過原點的直線 $u = kv$ 與 u 軸把平面分成四個扇形，其中兩個塗上陰影的扇形合起來就是事件 $U/V < k$。映射 $(u,v) \mapsto (-u,-v)$ 是繞原點旋轉 π，它把區域 $\{u < kv,\ v > 0\}$ 恰好映到 $\{u > kv,\ v < 0\}$ 上（把兩個不等式都乘以 -1 即可）。徑向對稱的密度滿足 $h(-u,-v) = h(u,v)$，所以這兩個區域的概率相同。因此

$$\mathrm{P}\left(\frac{U}{V} < k\right) = 2\,\mathrm{P}(U < kV,\ V > 0),$$

這就是我們要證明的結果。

U/V 的密度

採用極坐標（polar coordinates）$u = r\cos\theta$，$v = r\sin\theta$。區域 $\{u < kv,\ v > 0\}$ 是扇形 $\alpha < \theta < \pi$，其中 $\alpha \in (0,\pi)$ 是射線 $u = kv$，$v > 0$ 與正 u 軸所成的角，所以 $\cot\alpha = k$。（事實上，當 $0 < \theta < \pi$ 時有 $\sin\theta > 0$，於是 $u < kv$ 變成 $\cot\theta < k$；由於 cot 在 $(0,\pi)$ 上遞減，這就是 $\theta > \alpha$。）

想一想 在不知道函數 ρ 的情況下，(U,V) 落在以原點為頂點、角度為 β 的扇形內的概率是多少？

在極坐標中，面積元素是 $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$，所以扇形 $\theta_1 < \theta < \theta_1 + \beta$ 的概率為

$$\int_{\theta_1}^{\theta_1+\beta}\int_0^\infty \rho(r)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \beta\int_0^\infty \rho(r)\,r\,\mathrm{d}r = \frac{\beta}{2\pi},$$

因為取 $\beta = 2\pi$ 便得到整個平面，所以 $2\pi\int_0^\infty \rho(r)\,r\,\mathrm{d}r = 1$。換句話說，無論 ρ 是甚麼，(U,V) 的方向都是均勻分佈（uniformly distributed）的。

我們的扇形的角度是 $\pi - \alpha$，所以

$$\mathrm{G}(k) = \mathrm{P}\Big(\frac{U}{V} < k\Big) = 2\cdot\frac{\pi-\alpha}{2\pi} = 1 - \frac{\alpha}{\pi}.$$

由於 $\cot\alpha = k$ 且 $\alpha \in (0,\pi)$，我們有 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan k$（兩邊都在 $(0,\pi)$ 內，而且餘切都等於 k，因為 $\cot(\frac{\pi}{2} - \psi) = \tan\psi$）。因此

$$\mathrm{G}(k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan k, \qquad -\infty < k < \infty.$$

它由 0 上升至 1，正如分佈函數（distribution function）所必須的那樣。求導便得到 U/V 的密度：

$$\mathrm{g}(k) = \mathrm{G}'(k) = \frac{1}{\pi(1+k^2)}, \qquad -\infty < k < \infty,$$

這正是所求。特別地，這個結果適用於第一部分中兩個獨立標準正態變量（standard normal）之比 X/Y。

驗算

- $\mathrm{G}(0) = \frac{1}{2}$：由對稱性，$U/V$ 取正值與取負值的可能性相同。
- $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{\pi(1+k^2)} = \frac{1}{\pi}\big[\arctan k\big]_{-\infty}^{\infty} = 1$。
- 用三個不同的徑向對稱分佈（兩個獨立的標準正態變量、單位圓盤上的均勻分佈，以及與 e^{-r} 成正比的密度）各取 2×10^5 個點進行模擬，每次都得到 $\mathrm{P}(U/V < 0.7) \approx 0.694$，與 $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan 0.7 \approx 0.6944$ 吻合；對於若干個 k 值，恆等式兩邊的差距都在抽樣誤差之內。

常見錯誤

- 寫成 $\{U/V < k\} = \{U < kV\}$：當 $V < 0$ 時，乘以 V 會令不等號反轉。
- 不加細想便取 $\alpha = \arctan(1/k)$：當 $k < 0$ 時它落在 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 內，而我們需要的角卻在 $(0,\pi)$ 內。寫成 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan k$ 則對每個 k 都適用。

STEP 之外

密度 $\frac{1}{\pi(1+k^2)}$ 就是標準柯西分佈（*Cauchy distribution*）。它以沒有平均值而聞名（$|k|\,\mathrm{g}(k)$ 的積分發散），所以大數定律（law of large numbers）對它並不成立：n 個獨立柯西變量的平均值，與其中任何一個變量具有相同的柯西分佈。這裏的極坐標論證，讓你初嘗以雅可比行列式（Jacobian）變換聯合密度的滋味，這是大學一年級的標準技巧。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）對兩者都有論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。