詳細解答

STEP III 1995，第 11 題

力學 • 相對速度

> **STEP III 1995，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q11

關鍵思路

改用船的參考系（frame of reference）來看。相對於船，飛機必須沿西北方向的直線筆直飛出，再沿同一直線筆直飛回。空氣帶着飛機一起移動，所以在這個參考系中，飛機的速度等於它的空速（airspeed）向量再加上一股「水流」：風的速度減去船的速度。一旦知道這股水流，每一程都是一道渡河問題。我們選取航向（heading），使合速度（resultant velocity）指向這條直線的方向，然後由來回所需的時間定出距離。

解答

全題取 x 軸向東、y 軸向北，速率以節（knot，即每小時海里數）為單位，於是距離便以海里（nautical mile）為單位。船的速度是 $(-V, 0)$。若空氣以速度 $\mathbf{w}$ 移動，而飛機相對於空氣的速度是 $\mathbf{a}$，其中 $|\mathbf{a}| = kV$，則飛機相對於船的速度（相對速度，relative velocity）是

$$\mathbf{a} + \mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} = \mathbf{w} - (-V, 0) = \mathbf{w} + (V, 0).$$

飛機一直保持在船的西北方，所以 $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ 在去程必須指向 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ 的方向，在回程則必須指向 $-\mathbf{u}$ 的方向。

有風時：去程

風是由北向南吹的，所以 $\mathbf{w} = (0, -V)$，而

$$\mathbf{c} = (V, -V) = -\sqrt{2}\, V\, \mathbf{u}.$$

這股水流的速率是 $\sqrt{2}\,V$，方向為正東南，恰好沿着巡邏線。因此機師只需把機頭對準這條直線。去程（向西北）時她正面逆流而飛；回程時則順流而飛：

$$\text{去程速率} = (k-\sqrt{2})V, \qquad \text{回程速率} = (k+\sqrt{2})V.$$

這裏需要 $k > \sqrt{2}$：否則飛機永遠無法沿西北方向的直線離開船。

若飛機飛到距離船 d_w 之處，而每次來回需時 $\frac{1}{2}$ 小時，則

$$\frac{d_w}{(k-\sqrt{2})V} + \frac{d_w}{(k+\sqrt{2})V} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{d_w}{V}\cdot\frac{2k}{k^2-2} = \frac{1}{2},$$

所以

$$d_w = \frac{(k^2-2)V}{4k}.$$

因此去程需時

$$\frac{d_w}{(k-\sqrt{2})V} = \frac{k^2-2}{4k(k-\sqrt{2})} = \frac{k+\sqrt{2}}{4k}\ \text{小時} = 15\left(1+\frac{\sqrt{2}}{k}\right)\ \text{分鐘}.$$

這個時間必定多於 15 分鐘，正合預期：去程是逆流而行的。

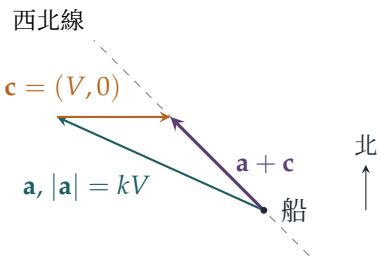
想一想 在無風的情況下，飛機為甚麼不能同樣只把機頭對準西北？

無風時，水流不再沿着巡邏線。假如機師把機頭對準西北，水流中向東的部分便會把飛機帶離這條直線。她必須把機頭稍為偏向迎着水流的一方，而這會耗去她一部分空速。

無風時

現在 $\mathbf{w} = \mathbf{0}$，所以 $\mathbf{c} = (V, 0)$：相對於船，空氣以速率 V 向東流動。把 $\mathbf{c}$ 分解為沿直線的分量（component）和垂直於直線的分量，前者用 $\mathbf{u}$，後者用 $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$：

$$\mathbf{c} = -\frac{V}{\sqrt{2}}\,\mathbf{u} + \frac{V}{\sqrt{2}}\,\mathbf{v}.$$



合速度不能有 $\mathbf{v}$ 分量，所以 $\mathbf{a}$ 的 $\mathbf{v}$ 分量必須是 $-V/\sqrt{2}$。由於 $|\mathbf{a}| = kV$，它沿行進方向的分量便是

$$\sqrt{k^2V^2 - \tfrac{1}{2}V^2} = V\sqrt{k^2 - \tfrac{1}{2}}.$$

沿着這條直線，水流在去程的貢獻是 $-V/\sqrt{2}$，在回程則是 $+V/\sqrt{2}$（因為 $\mathbf{c}\cdot(-\mathbf{u}) = V/\sqrt{2}$）。設 $A = V\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}$ 及 $B = V/\sqrt{2}$，則

$$\text{去程速率} = A - B, \qquad \text{回程速率} = A + B.$$

去程速率是正數，因為 $A^2 - B^2 = V^2(k^2 - 1) > 0$。

來回同樣需時半小時，於是

$$\frac{d_c}{A-B} + \frac{d_c}{A+B} = \frac{2A\,d_c}{A^2 - B^2} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad d_c = \frac{A^2 - B^2}{4A} = \frac{V(k^2-1)}{4\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}}.$$

比值

兩式相除，

$$\frac{d_w}{d_c} = \frac{(k^2-2)V}{4k}\cdot\frac{4\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}}{V(k^2-1)} = \frac{(k^2-2)\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}}{k(k^2-1)}.$$

由於 $\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4k^2 - 2}$，

$$\frac{d_w}{d_c} = \frac{k^2-2}{2k(k^2-1)}\sqrt{4k^2-2},$$

這正是所求的結果。

驗算

- 當 $k \to \infty$ 時，風和船幾乎無關重要。去程時間趨向 15 分鐘，而 $d_w/d_c \to 1$（比值的分子和分母都以 $2k^3$ 的速度增長）。
- 當 $k \to \sqrt{2}^{+}$ 時，有風時的去程速率降至零，所以 $d_w \to 0$，比值 $\to 0$，與公式相符。
- 當 $k = 2$ 時，去程需時 $15(1 + 1/\sqrt{2}) \approx 25.6$ 分鐘，而 $d_w/d_c = \frac{2}{12}\sqrt{14} \approx 0.624$。我們直接解出航向，並逐步模擬整個運動，以數值方法確認了這個結果。

常見錯誤

- 把風向弄反：「由北向南」的風是朝着南方吹的。

- 把船的速度加上去，而不是減去。相對於一艘向西航行的船，靜止的空氣是向東漂移的。
- 在無風時把機頭對準西北，並以 $kV \pm V/\sqrt{2}$ 作為速率。必須先抵銷橫向的水流。

STEP 之外

這是一次伽利略參考系變換（Galilean change of reference frame）：在彼此作勻速相對運動的參考系中量度所得的速度，只相差一個常向量。邁克生—莫雷（Michelson–Morley）的「河中小船」論證，背後也是同一套計算。在那個論證中，橫渡來回與順逆流來回所需的時間並不相同，情況與本題如出一轍，而這正是後來被狹義相對論（special relativity）推翻的經典計算。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）正是以這種思路先講相對運動，再講相對論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。