詳細解答

STEP III 1995，第 10 題

力學 • 斜面上的拋體

> **STEP III 1995，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q10

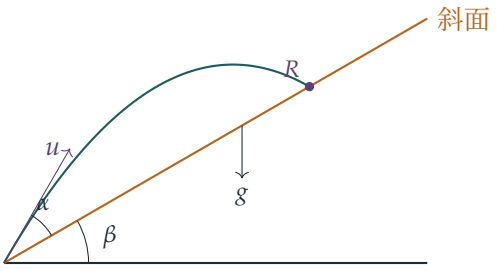
關鍵思路

在斜面（inclined plane）上，最自然的坐標軸不是水平和垂直方向，而是沿着斜面和垂直於斜面的方向。在這組坐標軸下，重力有兩個恆定的分量，飛行時間（time of flight）單憑垂直於斜面的運動便可求得，而射程（range）則是三角函數的乘積。利用積化和差公式（factor formula）把這個乘積化為兩個正弦之差，最大值便一目了然，完全不需要微積分。

解答

建立模型

把炮彈視為只受重力作用而自由運動的質點（particle），不計空氣阻力，從斜面底部沿最大斜率線（line of greatest slope）向上發射。設發射方向與斜面的夾角為 α，則它相對於水平面的仰角（angle of elevation）為 $\theta = \alpha + \beta$；我們需要 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$，炮彈才會真正沿斜面向上飛行。



取 x-軸沿最大斜率線向上，y-軸垂直於斜面並指向離開斜面的一方。把加速度 g（鉛垂

向下）沿這兩個方向分解，得

$$\ddot{x} = -g\sin\beta, \qquad \ddot{y} = -g\cos\beta,$$

而初速度沿斜面的分量為 $u\cos\alpha$，垂直於斜面的分量為 $u\sin\alpha$。因此在時間 t 時

$$x = ut\cos\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\beta, \qquad y = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2\cos\beta.$$

飛行時間與射程

當 $t > 0$ 而再次有 $y = 0$ 時，炮彈着地：

$$T = \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta}.$$

於是炮彈沿斜面向上所走的距離為

$$\begin{aligned} R = x(T) &= \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g\cos\beta} - \tfrac{1}{2}g\sin\beta\cdot\frac{4u^2\sin^2\alpha}{g^2\cos^2\beta} \\ &= \frac{2u^2\sin\alpha}{g\cos^2\beta}\big(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\big) \\ &= \frac{2u^2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}. \end{aligned}$$

想一想 怎樣才能不用求導而求出 $\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$ 的最大值？

在積化和差公式 $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ 中取 $A = \alpha$ 和 $B = \alpha+\beta$，得

$$2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta,$$

所以

$$R = \frac{u^2\big(\sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta\big)}{g\cos^2\beta}.$$

只有 $\sin(2\alpha+\beta)$ 這一項與 α 有關，而它最大只能是 1。當 α 取遍 $(0, \frac{\pi}{2}-\beta)$ 時，角 $2\alpha+\beta$ 取遍 $(\beta, \pi-\beta)$，而這個區間包含 $\frac{\pi}{2}$；所以最大值 1 確實可以取到，而且恰好在 $2\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ 時取到，即

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}, \qquad \text{等價地} \qquad \theta = \alpha+\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

因此大炮應以高於水平面 $\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ 的角度發射：發射方向平分斜面與鉛垂線之間的夾角。

最大射程

取 $\sin(2\alpha+\beta) = 1$，並利用 $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = (1-\sin\beta)(1+\sin\beta)$，

$$R_{\max} = \frac{u^2(1-\sin\beta)}{g(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)},$$

其中由於 $\beta < \frac{\pi}{2}$，約去 $1-\sin\beta$ 是合理的。這就是所求的距離。

驗算

- 平地，即 $\beta = 0$：最佳角度是 $45°$，射程為 u^2/g，正是大家熟悉的結果。
- 當 $\beta \to \frac{\pi}{2}$（一個鉛垂的「斜面」）時，最佳方向趨向垂直向上，而 $R_{\max} \to u^2/(2g)$，即垂直向上發射的炮彈所能達到的最大高度。
- 數值上，取 $u = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 和 $\beta = 30°$，公式給出在仰角 $60°$ 時 $R_{\max} \approx 27.18\,\mathrm{m}$。在水平和垂直坐標下逐步計算炮彈的運動，直至它穿過斜面，對隨機選取的 u, β, α 都能重現 $R(\alpha)$；再對 α 作精細搜索，最大值確實出現在 $\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$。

常見錯誤

- 混淆了與水平面的夾角和與斜面的夾角；答案 $\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ 是從水平面量起的。
- 遺漏了沿斜面方向的分量 $-g\sin\beta$，結果得到的只是比例出錯的平地射程公式。

STEP 之外

這個問題有一個優雅的幾何看法：從同一點以速率 u 發射的所有軌跡，都位於一條「安全拋物線」(parabola of safety，即這些軌跡的包絡線 (envelope)) 之內，其焦點 (focus) 就在發射點，而任何斜面上的最大射程，就在斜面與這條拋物線相交之處。利用焦點–準線（directrix）性質，一行便可得出 $R_{\max} = u^2/(g(1+\sin\beta))$，同時解釋了為何最佳方向平分斜面與鉛垂線之間的夾角。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）以向量（vector）方法處理拋體（projectile）問題，是進一步學習的好選擇。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。