詳細解答

STEP III 1995，第 1 題

純數學 • 聯立線性方程

> **STEP III 1995，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q1

關鍵思路

第二條和第三條方程的 y 項和 z 項完全相同，所以兩式相減便可一次過消去兩個未知數，只剩下一條關於 x 的方程。這道題的重點，大部分在於找出 a 和 b 取哪些值時，這一步或其後的某次除法會失效。係數的行列式（determinant）能預先告訴我們這些值在哪裏，所以我們先把它算出來，然後逐一處理每個例外情況。

解答

把方程編號為

$$a^2x + ay + z = a^2 \tag{1}$$

$$ax + y + bz = 1 \tag{2}$$

$$a^2bx + y + bz = b. \tag{3}$$

哪裏會出問題？

把係數矩陣（coefficient matrix）的行列式沿第一行展開，

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ a^2b & 1 & b \end{vmatrix} = a^2(b-b) - a(ab - a^2b^2) + (a - a^2b)$$

$$= a^3b^2 - 2a^2b + a = a(ab-1)^2.$$

所以除非 $a = 0$ 或 $ab = 1$，否則方程組恰有一個解。在這兩種情況下，方程組要麼無解，要麼有無限多個解，我們必須回到方程本身才能判斷是哪一種。

一般情況：$a \neq 0$ 且 $ab \neq 1$

由 (3) 減去 (2)，便可消去 y 和 z：

$$(a^2b - a)x = b - 1, \qquad \text{即} \qquad a(ab-1)\,x = b - 1.$$

由於 $a \neq 0$ 且 $ab \neq 1$，我們可以相除，得

$$x = \frac{1-b}{a(1-ab)}.$$

接着，由 (1) 得 $z = a^2 - a^2x - ay$。把它代入 (2)：

$$ax + y + a^2b - a^2bx - aby = 1 \quad \Longrightarrow \quad (1-ab)\,y = (1 - a^2b) - ax(1-ab).$$

除以 $1 - ab \neq 0$，並利用 $ax = \dfrac{1-b}{1-ab}$，

$$y = \frac{1-a^2b}{1-ab} - \frac{1-b}{1-ab} = \frac{b-a^2b}{1-ab} = \frac{b(1-a^2)}{1-ab}.$$

最後，

$$\begin{aligned} z = a^2 - a(ax) - ay &= a^2 - \frac{a(1-b)}{1-ab} - \frac{ab(1-a^2)}{1-ab} \\ &= \frac{a^2 - a^3b - a + ab - ab + a^3b}{1-ab} = \frac{a(a-1)}{1-ab}. \end{aligned}$$

所以當 $a \neq 0$ 且 $ab \neq 1$ 時，唯一解為

$$\boxed{x = \frac{1-b}{a(1-ab)}, \qquad y = \frac{b(1-a^2)}{1-ab}, \qquad z = \frac{a(a-1)}{1-ab}.}$$

$a = 0$ 的情況

方程變成

$$z = 0, \qquad y + bz = 1, \qquad y + bz = b,$$

所以 $z = 0$，$y = 1$，而最後一條方程則表示 $1 = b$。因此：

- 若 $a = 0$ 且 $b \neq 1$，方程組**無解**；
- 若 $a = 0$ 且 $b = 1$，解為 $x = \lambda$，$y = 1$，$z = 0$，其中 λ 為任意實數：這些解構成一條直線，因為 x 已不再出現在任何一條方程之中。

$ab = 1$ 的情況（故 $a \neq 0$）

想一想 當 $ab = 1$ 時，方程 $a(ab-1)x = b-1$ 的左方等於 0。這告訴我們甚麼？

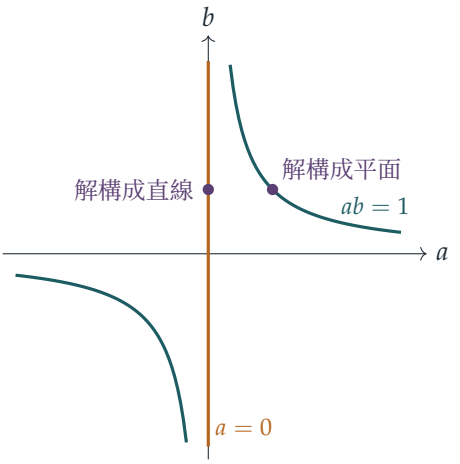
由 (3) 減去 (2) 這一步仍然成立；它現在變成 $0 = b-1$。所以若 $b \neq 1$，方程組便不相容（inconsistent）。在 $ab = 1$ 之下，條件 $b = 1$ 必然令 $a = 1$。因此：

- 若 $ab = 1$ 且 $a \neq 1$，方程組**無解**；
- 若 $a = b = 1$，三條方程全都變成 $x + y + z = 1$，所以解為 $x = \lambda$，$y = \mu$，$z = 1 - \lambda - \mu$，其中 λ, μ 為任意實數：這些解構成一整個平面。

這與行列式中的平方因子 $(ab-1)^2$ 吻合。在 $a = b = 1$ 時，矩陣的秩（rank）一直降至 1，所以有兩個自由參數；而在 $a = 0$、$b = 1$ 時，矩陣的秩為 2，只有一個自由參數。

總結

下圖所示為 (a, b) 平面。在直線 $a = 0$ 和雙曲線（hyperbola）$ab = 1$ 以外，方程組有唯一解。在這兩條線上，除了兩個標示出來的點之外，方程組無解。



- $a \neq 0$，$ab \neq 1$：上面方框內的唯一解。
- $a = 0$，$b = 1$：$(x, y, z) = (\lambda, 1, 0)$，$\lambda \in \mathbb{R}$。
- $a = b = 1$：$(x, y, z) = (\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu)$，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$。
- $a = 0$ 而 $b \neq 1$，或 $ab = 1$ 而 $a \neq 1$：無解。

驗算

取 $a = 2$，$b = 3$。公式給出 $x = \frac{1}{5}$，$y = \frac{9}{5}$，$z = -\frac{2}{5}$，而確實有 $4 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{9}{5} - \frac{2}{5} = 4 = a^2$，$\frac{2}{5} + \frac{9}{5} - \frac{6}{5} = 1$ 以及 $\frac{12}{5} + \frac{9}{5} - \frac{6}{5} = 3 = b$。另一個快捷的測試是取 $b = 1$，$a \neq 0, 1$：公式給出 $x = 0$，$y = 1 + a$，$z = -a$，而這些值滿足全部三條方程。我們亦以精確的有理數運算，對 2000 組隨機選取的 (a, b) 檢驗過行列式和一般公式。

常見錯誤

- 未有先把 $a = 0$ 和 $ab = 1$ 分開處理，便除以 $a(ab - 1)$。題目說「對所有可能的值」，意思就是特殊情況正是這道題的重點所在。
- 聲稱「行列式為零，所以無解」。行列式為零只排除了唯一解的可能；在這道題中，有兩組特殊的參數值會給出無限多個解。
- 忽略了 $ab = 1$ 與 $b = 1$ 同時成立必然令 $a = 1$，所以雙曲線上只有一個特殊點。

STEP 之外

這是一個小例子，說明矩陣的秩如何支配一個線性方程組（linear system）。方程組相容，當且僅當係數矩陣與增廣矩陣（augmented matrix）的秩相同；這時所有解構成一個維數（dimension）為 3 − 秩 的集合。這就是為甚麼我們得到的是單獨一點、一條直線或一個平面。高斯消去法（Gaussian elimination）令這一切變得有系統，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）則以大量例題詳細闡述這個課題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。