詳細解答

STEP II 1995，第 9 題

力學 • 摩擦力與平衡

STEP II 1995，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

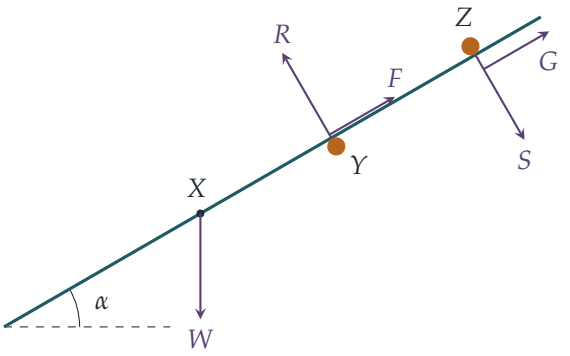
step.maths.org/questions/95-s2-q9

關鍵思路

桿沿着一條最大斜率線（line of greatest slope）放置，所以很自然會沿桿的方向和垂直於桿的方向分解（resolve）各力。桿擱在其上的那根橫桿把它向上推，使它離開平面；桿從其下穿過的那根橫桿則只能把它向下推。對 Y 取力矩（moment），便可知道桿的中心必須在哪裏；然後令兩個摩擦力（friction）都沿斜面向上並達到極限值（limiting value），就得到 μ 的最小值。

解答

我們把桿看成一根重量為 W 的均勻剛性桿（uniform rigid rod），把兩根橫桿看成固定的細桿，各自對桿施加一個垂直於桿的法向反作用力（normal reaction）和一個沿桿方向的摩擦力。由於桿與兩根水平橫桿都垂直，它便沿着兩根橫桿所在平面的一條最大斜率線放置，因此它與水平面的夾角為 α。設 R 為在 Y 處的反作用力（把桿推離平面，因為桿擱在這根橫桿之上），S 為在 Z 處的反作用力（把桿推向平面，因為桿在這根橫桿之下），其中 $R, S \geq 0$。設 F 和 G 分別為在 Y 和 Z 處的摩擦力，以沿斜面向上為正。



中心必須在哪裏

沿垂直於桿的方向分解，並對 Y 取力矩（距離沿桿量度）：

$$R = S + W\cos\alpha,$$
$$S\,d = W\cos\alpha \cdot XY.$$

S 對 Y 的力矩，必須由重量分量 $W\cos\alpha$ 的力矩抵消，而這個分量與 S 一樣指向平面。兩個方向相同的平行力，只有分別作用在 Y 的兩側時，它們對 Y 的力矩才可以互相抵消。由於 Z 在 Y 的斜面上方，中心 X 必須在 Y 處或在 Y 的下方，於是

$$XZ = XY + YZ, \qquad \text{所以} \qquad l = XY + d \geq d.$$

（假如 X 在 Y 與 Z 之間，或在 Z 之外，力矩方程便會迫使 $S < 0$：在 Z 處的橫桿就要把桿拉住，但它做不到，桿便會轉動而離開這根橫桿。）等式 $l = d$ 是臨界情況，此時 X 位於 Y 而 $S = 0$。

想一想 試卷上寫的是 $l \leq d$。為甚麼我們得到相反的不等式？

試卷上的不等式（inequality）是印刷錯誤：題目本身接着取 $l = 2d$，而這只有在 $l \geq d$ 時才可能。上面的論證說明，平衡（equilibrium）所要求的正是 $l \geq d$，我們以下就用這個條件。

μ 的最小值

以 $XY = l - d$ 代入，兩條方程給出

$$S = \frac{W\cos\alpha\,(l-d)}{d}, \qquad R = \frac{W\cos\alpha\,l}{d}, \qquad \text{所以} \qquad R + S = \frac{W\cos\alpha\,(2l-d)}{d}.$$

沿桿的方向分解，摩擦力必須承托重量沿斜面向下的分量：

$$F + G = W\sin\alpha.$$

摩擦定律要求 $|F| \le \mu R$ 及 $|G| \le \mu S$，所以 $F + G \le \mu(R + S)$。因此平衡需要

$$W \sin\alpha \le \mu \frac{W \cos\alpha\,(2l - d)}{d}, \qquad \text{即} \qquad \mu \ge \frac{d \tan\alpha}{2l - d}.$$

反過來，若 μ 等於這個值，則 $F = \mu R$ 和 $G = \mu S$（兩者都沿斜面向上，兩者都達到極限值）滿足每一條方程，所以桿可以處於平衡。因此最小的可能值是

$$\mu_{\min} = \frac{d \tan\alpha}{2l - d}.$$

當 $l = 2d$ 時，上式變成 $\mu_{\min} = \dfrac{d \tan\alpha}{3d} = \frac{1}{3}\tan\alpha$，所以 $\mu \ge \frac{1}{3}\tan\alpha$，正是所要證明的結果。

驗算

- 當 $l = d$ 時，中心位於較低的橫桿之上，$S = 0$，我們得到 $\mu \ge \tan\alpha$：這正是單一質點（particle）靜止在粗糙斜面上的熟悉條件。
- 當 $l \to \infty$ 時，反作用力無限增大，所以只需要極少的摩擦，而的確有 $\mu_{\min} \to 0$。
- 數值上，取 $\alpha = 0.7$ 及 $l = 2d$，公式給出 $0.28076\ldots$，即 $\frac{1}{3}\tan 0.7$。我們亦用電腦核對了對隨機選取的點所列的力方程和力矩方程，並驗證了平衡在略高於 $\mu_{\min}$ 時成立，在略低於它時則不成立。

常見錯誤

- 把兩個反作用力取成同一方向。桿從其下穿過的那根橫桿，只能把桿推向平面。
- 假設只有一根橫桿處的摩擦達到極限。要令 μ 盡可能小，兩根橫桿都必須提供最大的摩擦力，方向沿斜面向上。

STEP 之外

這是一道帶有不等式約束的靜力學（statics）小問題：接觸力必須滿足一組線性方程，同時滿足摩擦不等式，而 μ 的最小值就是可行集（feasible set）剛好變成非空的那一點。同樣的結構，即線性方程加上線性不等式，正是線性規劃（linear programming）以及工程學中摩擦接觸分析的基礎。想進一步了解剛體靜力學和摩擦，可參閱 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（一本大學力學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。