詳細解答

STEP II 1995，第 8 題

純數學 • 邏輯斯諦微分方程

STEP II 1995，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/95-s2-q8

本題在 *Beyond STEP* 第 8.3 節收穫種羣中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/harvesting.html

關鍵思路

這條增長定律是一條邏輯斯諦方程（logistic equation），屬於可分離變數（separable）的類型：利用部分分式（partial fractions），積分便化為兩個對數。至於第二部分，把新方程右邊配方（completing the square）後可見，平移 $y = x - K + \alpha$ 會把新方程變成完全相同的邏輯斯諦方程，只是以 α 取代了 K。因此我們可以直接沿用第一部分的答案，無須再做任何積分。

解答

沒有移除時的種羣

我們取 $K > 0$（種羣由 $x = K$ 開始，故必有 $K > 0$）。方程為

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (2K - x)x.$$

由 $x = K$ 出發，變化率為 $K^2 > 0$。解永遠不會到達 $x = 0$ 或 $x = 2K$，因為這兩個常數函數本身就是解，而這條方程的解不可能互相穿越。所以自始至終 $0 < x < 2K$，我們可以除以 $(2K - x)x$。寫成部分分式，

$$\frac{1}{x(2K - x)} = \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2K - x}\right),$$

於是分離變數後得

$$\frac{1}{2K}\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2K-x}\right)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}t,$$
$$\frac{1}{2K}\Big(\ln x-\ln(2K-x)\Big)=t+C.$$

由於 x 和 $2K-x$ 均為正數，無須加上絕對值符號。在 $t=0$ 時，$x=2K-x=K$，故左邊為 0，而 $C=0$。因此

$$\ln\frac{x}{2K-x}=2Kt\quad\Longrightarrow\quad x=(2K-x)\,\mathrm{e}^{2Kt}\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{2K\mathrm{e}^{2Kt}}{1+\mathrm{e}^{2Kt}}=\frac{2K}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}}.$$

為了配合題目要求的形式，寫 $2=(1+\mathrm{e}^{-2Kt})+(1-\mathrm{e}^{-2Kt})$：

$$x(t)=\frac{K(1+\mathrm{e}^{-2Kt})+K(1-\mathrm{e}^{-2Kt})}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}}=K+K\,\frac{1-\mathrm{e}^{-2Kt}}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}},$$

這正是所需的結果。（等價地，$x=K+K\tanh Kt$。）

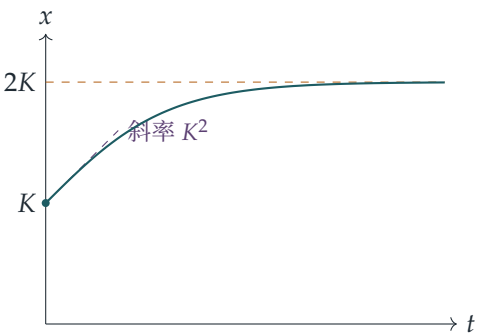
草圖。 當 $t\geq 0$ 時，$\mathrm{e}^{-2Kt}\in(0,1]$，所以 $K\leq x<2K$。於是 $\dot{x}=(2K-x)x>0$，故 x 遞增。把方程再求導一次，

$$\ddot{x}=(2K-2x)\,\dot{x}\leq 0\quad\text{因為}x\geq K,$$

所以圖像是凹向下的（concave），在 $t=0$ 處的斜率為 K^2（該處 $\ddot{x}=0$：時間的原點正是整條 S 形邏輯斯諦曲線的拐點（point of inflection））。當 $t\to\infty$ 時，$\mathrm{e}^{-2Kt}\to 0$，所以

$$x(t)\to 2K.$$

種羣數量在 $2K$ 處趨於平穩，從下方逼近它，但永遠不會到達。



以速率 L 移除

每小時移除 L 微克，即是從變化率中減去 L：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(2K-x)x-L.$$

把右邊配方：

$$(2K-x)x-L=-(x^2-2Kx)-L=K^2-L-(x-K)^2=\alpha^2-(x-K)^2,$$

其中 $\alpha=\sqrt{K^2-L}>0$，因為 $K^2>L$。

> ? **想一想** 為甚麼 $y=x-K+\alpha$ 是合適的代換？

右邊 $\alpha^2-(x-K)^2$ 在 $x=K\pm\alpha$ 處為零，這就是兩個平衡（equilibrium）種羣數量。平移 $K-\alpha$ 會把較低的平衡點移到 0，而原來的邏輯斯諦方程的較低平衡點也正在那裏。由 $x-K=y-\alpha$ 及 $\dot{y}=\dot{x}$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\alpha^2-(y-\alpha)^2=2\alpha y-y^2=(2\alpha-y)\,y.$$

這就是第一條方程，只是以 α 取代了 K。初始條件（initial condition）同樣吻合：$x(0)=K$ 給出 $y(0)=\alpha$，正好對應原來的 $x(0)=K$。由於 $\alpha>0$，第一部分的論證可以一字不改地套用，於是

$$y(t)=\frac{2\alpha}{1+\mathrm{e}^{-2\alpha t}},\qquad\text{所以}\qquad x(t)=K-\alpha+\frac{2\alpha}{1+\mathrm{e}^{-2\alpha t}}.$$

當 $t\to\infty$ 時，$\mathrm{e}^{-2\alpha t}\to 0$，所以 $y\to 2\alpha$，而

$$x(t)\to K-\alpha+2\alpha=K+\alpha,$$

這正是所求。當 $L>0$ 時，$\alpha<K$，所以被收割的種羣會穩定在較低的水平 $K+\alpha<2K$，一如所料。

驗算

- 在 $t=0$ 時，兩條公式都給出 $x=K$。設 $L=0$ 則 $\alpha=K$，第二條公式便化為 $2K/(1+\mathrm{e}^{-2Kt})$，即第一條公式。
- 對 $x=K+K\tanh Kt$ 求導，得 $\dot{x}=K^2\operatorname{sech}^2 Kt=K^2(1-\tanh^2 Kt)=(K-K\tanh Kt)(K+K\tanh Kt)=(2K-x)x$。
- 數值上，取 $K=1$，$x(1)=2/(1+\mathrm{e}^{-2})\approx 1.7616$；取 $K=1$ 及 $L=0.75$（故 $\alpha=\frac{1}{2}$），$x(1)\approx 1.2311$。兩者都與直接以數值方法（龍格—庫塔法，Runge–Kutta）求解微分方程所得的結果吻合，而且第二個解穩定在 $1.5=K+\alpha$。

常見錯誤

- 在部分分式中漏掉因子 $\frac{1}{2K}$，結果得出 e^{-t} 而不是 e^{-2Kt}。

- 在第二部分寫成 $+L$，或者忘記積分常數（constant of integration）必須重新求出。這裏的代換令 $y(0) = \alpha$，所以無須新的常數。

STEP 之外

第二部分讓我們初次接觸*平衡點的穩定性*（stability of equilibria）。方程 $\dot{x} = \alpha^2 - (x - K)^2$ 的平衡點在 $K \pm \alpha$：上面的一個吸引附近的解，下面的一個則排斥它們。只要看右邊的正負號便可看出這一點，完全不用解方程。這種相線（phase line）方法，以及 $L > K^2$ 時的情況（沒有平衡點，種羣在有限時間內滅絕），可參閱 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。