詳細解答

STEP II 1995，第 7 題

純數學 • 希羅公式

> **STEP II 1995，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q7

關鍵思路

內切圓（incircle）是貫穿全題的主角。由圓心到各切點的半徑都垂直於三角形的邊，正好是把 ABC 鋪滿的三個小三角形的現成的高，由此便得 (i)。第 (ii) 部分是希羅公式（Heron's formula）的經典推導：寫出 $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$，用餘弦定理（cosine rule）消去角度，然後利用平方差（difference of two squares）分解因式，前後兩次。至於球體，則要看一個垂直截面。球體與洞口各邊的接觸點，原來正正就是內切圓與三邊相切的點。

解答

第 (i) 部分

設內切圓與 BC、CA 和 AB 分別相切於 P、Q 和 R'。通過切點的半徑垂直於切線（tangent），所以 $IP \perp BC$、$IQ \perp CA$ 及 $IR' \perp AB$，而且每一條的長度都是 r。因此三角形 BIC 的底為 a，垂直高度為 r，其餘兩個三角形亦同理：

$$[BIC] = \tfrac{1}{2}ar, \qquad [CIA] = \tfrac{1}{2}br, \qquad [AIB] = \tfrac{1}{2}cr.$$

由於 I 位於三角形之內，這三個三角形恰好拼成 ABC，互不重疊。相加得

$$\Delta = \tfrac{1}{2}r(a+b+c) = rs,$$

正是所求。

第 (ii) 部分

把 $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ 平方，並利用 $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$，

$$\Delta^2 = \tfrac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2\alpha) = \tfrac{1}{16}[4b^2c^2 - (2bc\cos\alpha)^2],$$

這就是第一個結果。方括號內是一個平方差：

$$16\Delta^2 = (2bc - 2bc\cos\alpha)(2bc + 2bc\cos\alpha).$$

根據餘弦定理，$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$。把它代入每個因式，

$$2bc - 2bc\cos\alpha = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b-c)^2,$$
$$2bc + 2bc\cos\alpha = (b^2 + 2bc + c^2) - a^2 = (b+c)^2 - a^2,$$

所以

$$\Delta^2 = \tfrac{1}{16}[a^2 - (b-c)^2][(b+c)^2 - a^2],$$

即第二個結果。每個方括號又是一個平方差：

$$16\Delta^2 = (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a).$$

現在引入 s。由於 $a+b+c = 2s$，

$$b+c-a = 2(s-a), \qquad a-b+c = 2(s-b), \qquad a+b-c = 2(s-c),$$

所以該乘積為 $2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c) = 16\,s(s-a)(s-b)(s-c)$。因此 $\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$。由於 $\Delta > 0$，我們取正平方根：

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

第 (iii) 部分

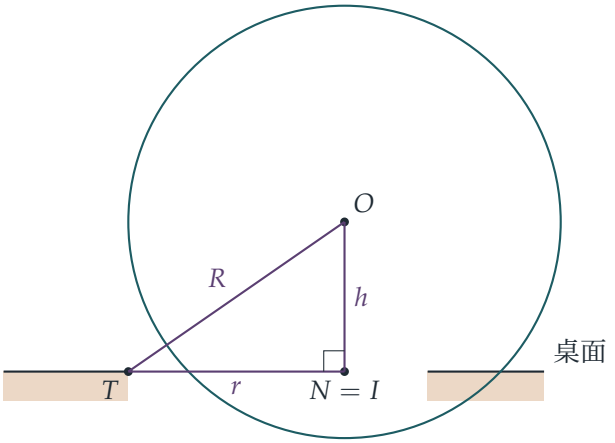
設 O 為球心，h 為球心高出桌面的高度。設 N 為由 O 到桌面所在平面的垂足（foot of the perpendicular），所以 $ON = h$。球體擱在洞口的三條邊上。假設它與邊 BC 相切於點 T。

? **想一想** 為甚麼 N 必定是內心（incentre）I？

在球體與直線相切的點上，半徑垂直於該直線，所以 $OT \perp BC$ 且 $OT = R$。此外，ON 垂直於整個桌面平面，所以 $ON \perp BC$。於是 BC 垂直於平面 ONT 內兩條不平行的直線，因而垂直於該平面，當然也垂直於 NT。所以 NT 就是由 N 到 BC 的垂直距離，而在直角三角形 ONT 中運用畢氏定理（Pythagoras' theorem），得

$$NT^2 = R^2 - h^2.$$

對邊 CA 和 AB 作同樣的論證，可知 N 與三條邊的距離同為 $\sqrt{R^2-h^2}$。點 N 位於三角形之內（球體坐落在洞口之上），而三角形內與三邊等距的點只有內心一個。所以 $N=I$，這個共同的距離就是 r，而各接觸點正是內切圓與三邊相切之處。這些點都在邊本身之上，而不是在邊的延線上，所以球體確實是擱在三條邊上。



上圖顯示通過 O 和 T 的垂直截面；邊 BC 穿過 T，垂直於紙面。在三角形 ONT 中運用畢氏定理，現在得到 $h^2=R^2-r^2$。由 (i) 和 (ii)，

$$r=\frac{\Delta}{s}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s},\qquad \text{所以}\qquad r^2=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}.$$

因此球心高出桌面的高度為

$$h=\sqrt{R^2-\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

。這需要 $R>r$：不比內切圓大的球體會直接穿過洞口掉下去。

驗算

取 3–4–5 三角形：$s=6$，希羅公式給出 $\Delta=\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}=6$，與 $\frac{1}{2}\cdot3\cdot4$ 吻合。於是 $r=\Delta/s=1$，你可以用直角三角形的公式 $r=\frac{1}{2}(3+4-5)$ 加以核實。當 $R=2$ 時，公式給出 $h=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}\approx1.732$。當 $R\to r^+$ 時，$h\to0$：球體不斷下沉，直至其赤道與桌面齊平，並擱在內切圓上。作為更全面的檢驗，我們以數值方法測試了 18,816 個隨機三角形。在每一個情況中，置於內心上方高度 h 處的球心，與三條邊所在直線的距離都恰好是 R，而且最近的點都落在邊之內。

常見錯誤

▶ 取 $h=\sqrt{R^2-d^2}$，其中 d 是由 I 到某個頂點的距離。球體接觸的是邊，而不是角。

- 毫無理由地假設球心位於內心的正上方。這需要用上述的垂直論證，或者至少要給出清晰的對稱理由。
- 在 (ii) 中把因式的配對弄錯：$b + c - a = 2(s - a)$，而不是 $2(s - b)$ 或 $2(s - c)$。

STEP 之外

希羅公式屬於一系列關於面積和體積的對稱公式。婆羅摩笈多（Brahmagupta）公式對圓內接四邊形（cyclic quadrilateral）起着同樣的作用，而凱萊－門格行列式（Cayley–Menger determinant）則可由四面體的六條棱長求出其體積。「半徑 $\perp$ 切線，所以垂足就是內心」這一步，是三垂線定理（theorem of the three perpendiculars）的三維版本，在向量幾何中很值得掌握。想找更多這類題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。