詳細解答

STEP II 1995，第 6 題

純數學 • 單位根

> **STEP II 1995，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q6

關鍵思路

七次單位根（roots of unity）是 $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^6$，它們的和為零。把六個非實數的根分成兩組，每組三個：$\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\}$ 和 $\{\alpha^3, \alpha^5, \alpha^6\}$。第二組正好是第一組各數的共軛複數（complex conjugate），所以兩組的和互為共軛。因此它們的和與積都是實數，而第一部分的結果把這兩個數變成二次式的係數。再取該根的實部和虛部，便得到所求的三角和。

解答

根與係數

若 u 和 v 是 $z^2 + az + b = 0$ 的根，則首一（monic）二次式 $z^2 + az + b$ 有因式 $z - u$ 和 $z - v$，所以對所有 z 都有

$$z^2 + az + b = (z - u)(z - v) = z^2 - (u + v)z + uv$$

。比較 z 的係數和常數項，得 $a = -u - v$ 及 $b = uv$，這正是所要證明的。

單位根

先提醒一點。試卷上印的是 $z^6 - 1 = 0$，但這是 $z^7 - 1 = 0$ 的誤印。事實上，$\alpha^6 = \cos(12\pi/7) + \mathrm{i}\sin(12\pi/7) \neq 1$，而題目其餘部分顯然都與七次有關。我們以 $z^7 - 1 = 0$ 來解題。

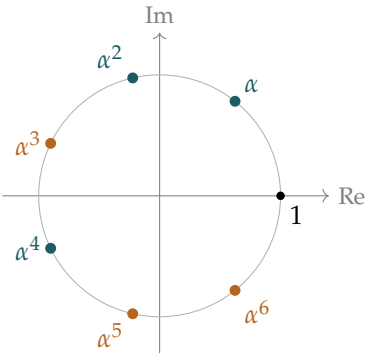
由棣美弗定理（de Moivre's theorem），

$$\alpha^7 = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1,$$

所以 α 是 $z^7-1=0$ 的根。更一般地，$\alpha^k=\cos(2k\pi/7)+\mathrm{i}\sin(2k\pi/7)$，而且 $(\alpha^k)^7=(\alpha^7)^k=1$。以下七個數

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \alpha^6$$

互不相同，因為它們的輻角（argument）$2k\pi/7$（$k=0,\dots,6$）在 $[0,2\pi)$ 內互不相同。7 次多項式最多有 7 個根，所以這些就是 $z^7-1=0$ 的全部根。它們位於單位圓上一個正七邊形的頂點。



整個解答全靠兩個事實。第一，各根之和為零：$z^7-1=(z-1)(z^6+z^5+\cdots+z+1)$，而 $\alpha\neq1$，所以

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=0. \qquad (*)$$

（等價的說法是：z^7-1 中 z^6 的係數為零。）第二，由於 $|\alpha|=1$，我們有 $\overline{\alpha^k}=\alpha^{-k}=\alpha^{7-k}$。所以 $\alpha^6=\overline{\alpha}$、$\alpha^5=\overline{\alpha^2}$ 及 $\alpha^3=\overline{\alpha^4}$。

求 A 和 B

設

$$p=\alpha+\alpha^2+\alpha^4,\qquad q=\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6.$$

由上面的共軛配對，$q=\overline{p}$。這正是對另一個根最自然的猜想：一個實係數二次式若有非實數根 p，則 $\overline{p}$ 也必定是它的根。

> **想一想** 我們怎樣知道 p 不是實數？假如它是實數，「另一個根」就不一定是 $\overline{p}$ 了。

p 的虛部是 $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$，我們會在最後證明它是正數。所以 p 不是實數，而兩個根就是 p 和 $\overline{p}=q$。（無論如何，只要找到實數 A 和 B，使 p 和 q 為根，這個二次式便已確定。）

由 $(*)$，

$$p+q=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=-1.$$

至於乘積，先展開，再利用 $\alpha^7 = 1$ 把各冪次化簡：

$$\begin{aligned} pq &= (\alpha + \alpha^2 + \alpha^4)(\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6) \\ &= \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^5 + \alpha^7 + \alpha^8 + \alpha^7 + \alpha^9 + \alpha^{10} \\ &= \alpha^4 + \alpha^6 + 1 + \alpha^5 + 1 + \alpha + 1 + \alpha^2 + \alpha^3 \\ &= 3 + (\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6) = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

留意在這九項之中，除了三個 1 之外，$\alpha, \ldots, \alpha^6$ 每個都恰好出現一次。由第一部分，$A = -(p+q)$ 及 $B = pq$，所以

$$A = 1, \qquad B = 2,$$

而 p 和 q 是 $z^2 + z + 2 = 0$ 的根，即

$$z = \frac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}.$$

三角和

取 $p = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ 的實部和虛部，並利用 $\alpha^k = \cos(2k\pi/7) + \mathrm{i}\sin(2k\pi/7)$，得

$$\operatorname{Re} p = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7},$$
$$\operatorname{Im} p = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}.$$

$z^2 + z + 2 = 0$ 的兩個根的實部都是 $-\frac{1}{2}$，所以

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2},$$

這正是所要證明的。（另一做法：由 $p + \overline{p} = -1$ 可直接得出 $2\operatorname{Re} p = -1$。）

虛部是 $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$，我們必須判斷是哪一個。

> **想一想** 三個正弦值之中兩個是正數，一個是負數。我們怎樣才能肯定哪一方佔優？

把負的那一項與其中一個正項比較。由於 $\frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}$，我們有 $\sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$。此外，$\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right) = \sin\frac{3\pi}{7}$。正弦函數在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上嚴格遞增（strictly increasing），而 $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{3\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\frac{3\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$。因此

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \underbrace{\sin\frac{2\pi}{7}}_{>0} + \underbrace{\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right)}_{>0} > 0,$$

從而

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

這亦確認了 $p = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ 不是實數，正如我們在上面所用到的。

驗算

用計算機（以弧度計算），$\cos\frac{2\pi}{7} \approx 0.6235$、$\cos\frac{4\pi}{7} \approx -0.2225$ 及 $\cos\frac{8\pi}{7} \approx -0.9010$，三者相加得 -0.5000。三個正弦值約為 0.7818、0.9749 和 -0.4339，相加得 1.3229。這與 $\frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1.3229$ 吻合。你也可以直接驗證 $p^2+p+2=0$：取 $p=\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$，則 $p^2=\frac{-6-2\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$，由此即得 $p^2+p+2=0$。

常見錯誤

- 照試卷所印使用 $z^6-1=0$。這樣 α 便不是根，而「和為零」這個事實 $(*)$ 亦不成立。
- 展開 pq 時忘記用 $\alpha^7=1$ 化簡冪次，或數錯了等於 1 的那三項。
- 聲稱正弦之和是正數，「因為有兩項是正數」。你需要作出比較，例如 $\sin\frac{3\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$。

STEP 之外

$\{1,2,4\}$ 與 $\{3,5,6\}$ 這個分法並非隨意。$1,2,4$ 這三個數正是模 7 的非零平方數，而 $2p+1=\mathrm{i}\sqrt{7}$ 是一個*高斯和*（Gauss sum）。高斯（Gauss）證明了：對於形如 $4k+3$ 的質數 ℓ，α^r 對所有二次剩餘（quadratic residue）r 求和，結果是 $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{\ell}}{2}$。這是兩套理論的第一步：一是關於哪些正多邊形可以用尺規作圖的理論（伽羅瓦理論，Galois theory），二是二次互反律（quadratic reciprocity）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 講述二次剩餘，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis* 則從幾何角度看單位根。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。