詳細解答

STEP II 1995，第 5 題

純數學 • 最優化與凹性

STEP II 1995，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

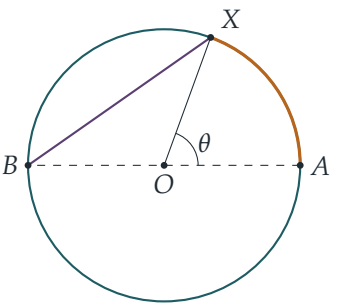
step.maths.org/questions/95-s2-q5

關鍵思路

選擇 (i) 和 (iii) 正是 (ii) 這一族路線的兩個極端：$\theta \to 0$ 表示直接游過對岸，$\theta \to \pi$ 表示全程跑步。因此我們把總時間寫成 θ 在 $[0, \pi]$ 上的函數，再問它的最小值在哪裏。出人意表的是，這個函數是凹函數（concave function），所以它唯一的駐點（stationary point）是極大點，而最佳路線永遠在其中一端。

解答

取泳池的半徑為 1 個長度單位，她的游泳速率為 1，於是她跑步的速率為 k。這樣時間便以（半徑）/（游泳速率）為單位，這並不影響任何比較。



三個時間

(i) 她游過直徑 AB，長度為 2，需時 2。

(iii) 她跑過一個半圓，長度為 π，需時 π/k。

(ii) 她跑過弧 AX，長度為 θ（半徑為 1），需時 θ/k。由於 $\angle AOB = \pi$，我們有 $\angle XOB = \pi - \theta$。三角形 XOB 是等腰三角形，其中 $OX = OB = 1$，所以弦（chord）長為

$$XB = 2\sin\tfrac{\pi-\theta}{2} = 2\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

（另一個等價的做法：因為 AB 是直徑，所以 $\angle AXB = \frac{\pi}{2}$；又由等腰三角形 AOX 得 $\angle XAB = \frac{\pi-\theta}{2}$，所以 $XB = 2\sin\angle XAB$。）她的總時間為

$$T(\theta) = \frac{\theta}{k} + 2\cos\frac{\theta}{2}, \qquad 0 < \theta < \pi.$$

這條公式在兩端同樣成立：$T(0) = 2$ 是 (i) 的時間，而 $T(\pi) = \pi/k$ 是 (iii) 的時間。因此，三個選擇全部可以用 $[0, \pi]$ 上的同一個連續函數來描述。

T 在哪裏最小？

求導數，得

$$T'(\theta) = \frac{1}{k} - \sin\frac{\theta}{2}, \qquad T''(\theta) = -\tfrac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

當 $0 < \theta < \pi$ 時，我們有 $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\frac{\theta}{2} > 0$，從而 $T''(\theta) < 0$：函數 T 在 $[0, \pi]$ 上是嚴格凹（strictly concave）的。

> **想一想** 若 $k > 1$，在 $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{k}$ 處有一個駐點。那不就是最佳的下水位置嗎？

不是：由於在該處 $T'' < 0$，它是一個極大點，是最差的下水位置。更一般地說，閉區間上的嚴格凹函數，其圖像嚴格位於連接兩端函數值的弦之上，所以對每一個滿足 $0 < \theta < \pi$ 的 θ，

$$T(\theta) > \Big(1 - \frac{\theta}{\pi}\Big)T(0) + \frac{\theta}{\pi}\,T(\pi) \geq \min(T(0), T(\pi)).$$

所以無論 k 取甚麼值，把 X 選在中途的任何位置，都及不上 (i) 和 (iii) 之中較快的那一個。（若 $k \leq 1$，我們可以更直接地看出這一點：這時在 $(0, \pi)$ 上 $T'(\theta) > 0$，因為 $\sin\frac{\theta}{2} < 1 \leq \frac{1}{k}$，所以 T 是遞增的，立即下水游泳便是最佳選擇。）

比較 (i) 和 (iii)

餘下只需比較 $T(0) = 2$ 與 $T(\pi) = \pi/k$：

- 若 $k < \frac{\pi}{2}$，則 $\pi/k > 2$，所以她應該**直接游過去**，即選擇 (i)；
- 若 $k > \frac{\pi}{2}$，則 $\pi/k < 2$，所以她應該**全程繞着池邊跑**，即選擇 (iii)；
- 若 $k = \frac{\pi}{2}$，(i) 和 (iii) 所需時間相同，兩者皆為最佳。

背後的物理原因很簡單：半圓的長度是直徑的 $\frac{\pi}{2}$ 倍。

最後，選擇 (ii) 是她永遠不會採用的：對每一個 $k > 0$ 和每一個 $\theta \in (0, \pi)$，它都嚴格地慢於 (i) 和 (iii) 之中較快的那一個。

驗算

取 $k = 3$，跑步需時 $\pi/3 \approx 1.047$，勝過游泳的 2；駐點位於 $\theta = 2\arcsin\frac{1}{3} \approx 0.680$，該處 $T \approx 2.112$，比兩端都慢，正是極大點應有的表現。用電腦在 e^{-4} 與 e^{4} 之間隨機抽取數千個 k，並在細密的 θ 網格上計算 T，從未發現區間內部有任何值低於 $\min(2, \pi/k)$，同時確認了分界點在 $k = \pi/2 \approx 1.571$。

常見錯誤

- 令 $T'(\theta) = 0$ 後，沒有檢查駐點的性質便宣稱所得結果是最優解：這裏它其實是極大點。
- 用了弧 XB 而不是弦，或者把弦長算成 $2\sin\frac{\theta}{2}$（那是 AX，不是 XB）。
- 忘記了 $k \leq 1$ 的情況，這時根本沒有駐點。

STEP 之外

這裏起作用的原理是：區間上的凹函數必在端點取得最小值；在更高維度，這變成以下事實：線性（或凹）目標函數在多邊形上的最小值必在頂點取得，而這正是線性規劃（linear programming）的基礎。這道題也是斯涅爾定律（Snell's law）和費馬（Fermat）最短時間原理的近親，不過在那些情況下，答案通常是內點，因為時間函數反而是凸（convex）的。想做更多這類風格的題目，可以試試 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。