詳細解答

STEP II 1995，第 4 題

純數學 • 沃利斯歸約公式

> **STEP II 1995，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q4

本題在 *Beyond STEP* 第 4.4 節沃利斯、*Beta* 與二分之一的階乘中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/wallis-beta.html

關鍵思路

利用分部積分法（integration by parts），可把 $\cos^2 t$ 化為 $1-\sin^2 t$，從而得到一條把 u_n 與 u_{n-2} 聯繫起來的歸約公式（reduction formula）。把這條公式乘以 u_{n-1}，可見 nu_nu_{n-1} 不隨 n 增大而改變，所以它等於 $n=1$ 時的值。餘下的就是夾逼（squeeze）：由於各 u_n 遞減，乘積 u_nu_{n-1} 介乎 u_n^2 與 u_{n-1}^2 之間。

解答

歸約公式

設 $n \geq 2$。我們把積分寫成 $u_n = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \sin^{n-1} t \, \mathrm{d}t$，然後分部積分：對 $\sin^{n-1} t$ 求導，並把 $\sin t$ 積分為 $-\cos t$：

$$\begin{aligned} u_n &= \Big[-\cos t \, \sin^{n-1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, \sin^{n-2} t \, \mathrm{d}t \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \big(1-\sin^2 t\big)\sin^{n-2} t \, \mathrm{d}t \\ &= (n-1)\big(u_{n-2} - u_n\big). \end{aligned}$$

邊界項等於零，因為在上限有 $\cos\frac{\pi}{2} = 0$，在下限有 $\sin 0 = 0$（這裏用到 $n-1 \geq 1$）。把含 u_n 的項合併，得

$$nu_n = (n-1)u_{n-2} \qquad (n \geq 2).$$

兩邊同乘以 u_{n-1}，得

$$nu_nu_{n-1} = (n-1)u_{n-1}u_{n-2} \qquad (n \geq 2),$$

這正是所需的結果。

恆定的乘積

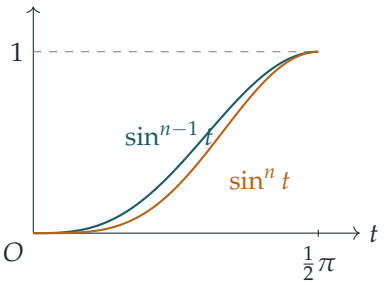
對 $n \geq 1$，記 $p_n = nu_nu_{n-1}$。上面的結果說明，對每個 $n \geq 2$ 都有 $p_n = p_{n-1}$，所以對每個 $n \geq 1$ 都有 $p_n = p_1$。現在

$$u_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad u_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos t\Big]_0^{\pi/2} = 1,$$

所以 $p_1 = 1 \cdot u_1u_0 = \frac{1}{2}\pi$。因此

$$nu_nu_{n-1} = \tfrac{1}{2}\pi \qquad \text{對所有} n \geq 1.$$

草圖與 $0 < u_n < u_{n-1}$



兩條曲線在 $t = 0$ 時都由 0 出發，一直遞增，並在 $t = \frac{1}{2}\pi$ 處達到 1（草圖所示為 $n = 4$ 的情況；當 $n = 1$ 時，上方的曲線是直線 $y = 1$）。對 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$，我們有 $0 < \sin t < 1$，所以

$$0 < \sin^n t = \sin t \cdot \sin^{n-1} t < \sin^{n-1} t.$$

因此，除了兩個端點之外，$\sin^n t$ 的圖像嚴格位於 $\sin^{n-1} t$ 的圖像之下。兩個函數都是連續（continuous）的，所以它們之下的面積滿足

$$0 < u_n < u_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

想一想 兩條曲線在端點處相接，為甚麼不等式仍然是嚴格的？

差 $\sin^{n-1} t - \sin^n t$ 是連續的，永不為負，而且在（例如）$t = \frac{1}{4}\pi$ 處為正。一個連續函數若在某一點為正，則在該點附近的一個小區間上也為正，所以它圍出的面積為正。在兩個孤立點處相接，並不會改變這個結論。同樣的論證可證明 $u_n > 0$。

雙邊界限

設 $n \geq 1$。由於 $u_n > 0$，把 $u_n < u_{n-1}$ 乘以 nu_n，得 $nu_n^2 < nu_n u_{n-1}$。由於 $u_{n-1} > 0$，乘以 nu_{n-1}，得 $nu_n u_{n-1} < nu_{n-1}^2$。中間的量是 $\frac{1}{2}\pi$，所以

$$nu_n^2 < \tfrac{1}{2}\pi < nu_{n-1}^2 \qquad (n \geq 1).$$

夾逼與極限

右邊的不等式對每個 $n \geq 1$ 都成立，所以我們可以用 $n+1$ 代替 n：

$$\tfrac{1}{2}\pi < (n+1)u_n^2, \qquad \text{所以} \qquad nu_n^2 > \frac{n}{n+1} \cdot \tfrac{1}{2}\pi.$$

把它與左邊的不等式結合，得

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)\tfrac{1}{2}\pi < nu_n^2 < \tfrac{1}{2}\pi.$$

當 $n \to \infty$ 時，$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$，所以下界趨向 $\frac{1}{2}\pi$。上界本身就是 $\frac{1}{2}\pi$。根據夾逼定理（squeeze theorem，又稱 sandwich theorem），

$$nu_n^2 \to \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{當} n \to \infty.$$

驗算

- 歸約公式給出 $u_2 = \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{4}\pi$，這與 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\pi$ 吻合（$\sin^2$ 的平均值是 $\frac{1}{2}$）。於是 $2u_2u_1 = \frac{1}{2}\pi$，與預期一致。
- 以數值方法（辛普森法則，Simpson's rule）計算，$u_{10} \approx 0.38656$，即 $\frac{63}{512}\pi$。所以 $10u_{10}^2 \approx 1.4943$，介乎 $\frac{10}{11} \cdot \frac{1}{2}\pi \approx 1.4280$ 與 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.5708$ 之間。
- 把遞推關係（recursion）一直算到 $n = 10^5$，得 $nu_n^2 \approx 1.570788$，已經非常接近 $\frac{1}{2}\pi$。

常見錯誤

- 忘記歸約公式需要 $n \geq 2$，所以常數必須用 u_0 和 u_1 來確定，而不能只用 u_1 和 u_2。
- 單憑 $\sin^n t \leq \sin^{n-1} t$ 就斷言 $u_n < u_{n-1}$。這樣只能得到 $\leq$；要得到嚴格不等式，被積函數的不等式必須在某個區間上嚴格成立。
- 試圖直接由 $\frac{1}{2}\pi < nu_{n-1}^2$ 得出下界。這條不等式限制的是 u_{n-1}，而不是 u_n，所以要先把下標移位。

STEP 之外

這些積分稱為沃利斯（Wallis）積分。把 u_{2m} 和 u_{2m+1} 寫成乘積，再利用 $nu_n^2 \to \frac{1}{2}\pi$，便可得出沃利斯乘積 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots$。同一個估計也確定了斯特靈（Stirling）公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$ 中的常數 $\sqrt{2\pi}$。這裏所用的夾逼論證，是大學一年級分析學的標準工具。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對此有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。