詳細解答

STEP II 1995，第 3 題

純數學 • 邏輯推理與計數

> **STEP II 1995，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q3

關鍵思路

這其實是一道喬裝了的邏輯謎題，而入手的方法是計數（counting）。每個賽段都派出 $5+4+3+2+1=15$ 分，所以五位車手的得分之和是一個已知的總數。Arouet 的得分非常接近滿分，幾乎足以確定他所有賽段的成績。其後，Eluard 的賽果把 Eluard 的得分從上下兩面夾住，而 Camus「四次名次相同」這個條件，只剩下幾種情況需要檢查。

解答

我們以 A, B, C, D, E 表示各車手的總得分。已知 $A > B > C > D > E$ 及 $A = 24$。

總分與 Arouet 的各賽段成績

每個賽段派出 15 分，所以五個賽段合共

$$A+B+C+D+E = 75, \qquad \text{因此} \qquad B+C+D+E = 51.$$

Arouet 最多可得 $5 \times 5 = 25$ 分。得到 24 分即是剛好失去一分，所以 Arouet 在四個賽段得第一名，在一個賽段得第二名。Eluard 贏了第 5 賽段，所以 Arouet 的第二名必定出現在第 5 賽段，而 Arouet 贏了第 1–4 賽段。

為何 Eluard 得 11 分

下界（*lower bound*）。Eluard 在第 4 賽段得 3 分，在第 5 賽段得 5 分，而在其餘三個賽段每段最少得 1 分。所以 $E \geq 3+5+3 = 11$。

上界（*upper bound*）。各人得分是互不相同的整數，且 $B > C > D > E$，所以 $D \geq$

$E+1$、$C \geq E+2$ 及 $B \geq E+3$。因此

$$51 = B+C+D+E \geq 4E+6, \qquad \text{所以} \qquad E \leq \tfrac{45}{4} < 12.$$

結合兩個界，得 $E = 11$。下界中等號成立，亦告訴我們 Eluard 在第 1、2 及 3 賽段每段都是最後一名。

留給 Barthes、Camus 和 Diderot 的名次

我們現在知道 Arouet 和 Eluard 在每個賽段的名次，所以餘下的名次由 Barthes、Camus 和 Diderot 三人瓜分：

賽段	Arouet、Eluard	留給 B、C、D 的名次	
1, 2, 3	第 1、第 5	第 2、第 3、第 4	（4、3、2 分）
4	第 1、第 3	第 2、第 4、第 5	（4、2、1 分）
5	第 2、第 1	第 3、第 4、第 5	（3、2、1 分）

此外 $B+C+D = 51-11 = 40$，且 $B > C > D > 11$，所以 $D \geq 12$ 及 $C \geq 13$。

想一想 Camus 有四次取得相同的名次。根據上表，那可以是哪些名次？

答案是第 2、第 3 或第 4 名。Camus 只能在第 4 和第 5 賽段取得第五名，那只有兩個賽段，不是四個。我們逐一考慮這三種可能。

Camus 四次得第 2 名。第二名只在第 1–4 賽段可供取得，所以 Camus 在這四個賽段全部得第二名。於是 Barthes 在第 1–3 賽段每段最多得 3 分，在第 4 賽段最多得 2 分，在第 5 賽段最多得 3 分。所以 $B \leq 9+2+3 = 14$。但 $C \geq 4 \times 4 = 16 > B$，出現矛盾（contradiction）。

Camus 四次得第 4 名。第四名在每個賽段都值 2 分，所以 Camus 的最佳總分是 $4 \times 2 + 4 = 12$（餘下的一個賽段得第二名）。這與 $C \geq 13$ 矛盾。

Camus 四次得第 3 名。第三名在第 1、2、3 及 5 賽段可供取得，每次值 3 分，所以這就是 Camus 的四次第三名。在第 4 賽段 Camus 得 $x \in \{4,2,1\}$ 分，而 $C = 12+x$。

- $x = 4$：$C = 16$，所以 $B \geq 17$ 及 $D = 40-B-C \leq 7$。這與 $D \geq 12$ 矛盾。
- $x = 2$：$C = 14$，所以 $B \geq 15$ 及 $D \leq 11$。同樣出現矛盾。
- $x = 1$：$C = 13$，所以 $B+D = 27$，其中 $B \geq 14$ 及 $12 \leq D \leq 12$。因此 $D = 12$ 及 $B = 15$。

所以各人得分為

$$\boxed{B = 15, \quad C = 13, \quad D = 12} \qquad (\text{其中} A = 24,\ E = 11).$$

Barthes 在最後賽段的名次

> **想一想** 我們知道總分，但不知道每個賽段的賽果。現有的資料足以確定第 5 賽段的結果嗎？

足夠，方法是用奇偶性論證（parity argument）。Camus 在第 1、2、3 及 5 賽段得第三名，在第 4 賽段得第五名，於是 Barthes 和 Diderot 在第 1–4 賽段每段都瓜分值 4 分和 2 分的名次。在第 5 賽段，他們瓜分值 2 分和 1 分的名次（第 4 及第 5 名）。假設 Diderot 在第 1–4 賽段中有 k 段取得值 4 分的名次，並在第 5 賽段得 $s \in \{1, 2\}$ 分。那麼

$$D = 4 \times 2 + 2k + s = 8 + 2k + s = 12.$$

所以 $s = 4 - 2k$ 是偶數，由此必有 $s = 2$（及 $k = 1$）。Diderot 在最後賽段得第四名，所以 **Barthes 在最後賽段得最後一名（第五名）**。

這樣的賽事確實存在。例如，取第 1 賽段：A、D、C、B、E；第 2 及第 3 賽段：A、B、C、D、E；第 4 賽段：A、B、E、D、C；第 5 賽段：E、A、C、D、B。這樣得出 $24, 15, 13, 12, 11$，符合要求。

驗算

- 總分吻合：$24 + 15 + 13 + 12 + 11 = 75 = 5 \times 15$。
- 在上述例子的賽事中，Camus 在四個賽段得第三名，而 Eluard 在第 4 賽段得第三名，在第 5 賽段得第一名。
- 用電腦搜尋全部 120^5 組可能的賽段賽果，只保留符合所有條件的，結果只找到得分 $(24, 15, 13, 12, 11)$。在每一種情況下，Barthes 在第 5 賽段都是第五名。（符合條件的賽事恰好有四個，視乎 Diderot 在第 1–4 賽段中哪一段得第二名而定。）

常見錯誤

- 只證明了 $E \geq 11$。題目問的是為何 Eluard 必定得 11 分，所以由 $B + C + D + E = 51$ 及得分互不相同而得出的上界是必不可少的。
- 假設 Camus 是在四個連續賽段取得相同名次，或者遺漏了第四名的情況。
- 求出了得分，卻沒有證明最後賽段的名次是必然的。只舉出一個賽事例子並不足夠；奇偶性論證說明了在每一個可能的賽事中，Barthes 在第 5 賽段都是最後一名。

STEP 之外

這個論證有三步：守恆定律（conservation law，即總分固定）、極端推理（extremal reasoning，24 分幾乎是最高分），以及奇偶性論證。這三者在組合數學（combinatorics）中一再出現。從上下兩面夾住一個量，直至它的值被迫確定下來，也是分析學（analysis）和數學奧林匹克解題的基本技巧。想做更多同類的謎題，可試試 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。Engel 的 *Problem-Solving Strategies* 則有整章篇幅討論不變量原理（invariance principle）和極端原理（extremal principle）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。