詳細解答

STEP II 1995，第 2 題

純數學 • 以遞推法計算着色數目

> **STEP II 1995，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q2

本題在 *Beyond STEP* 第 9.3 節爲籬笆樁着色中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/fence-posts.html

關鍵思路

把以紅色開頭的塗色方法，按最後一根柱子的顏色分類。直線上的每一種塗色方法都可以逐根柱子加上去而得出，而每根新柱子恰好有兩種可用的顏色，所以總數很容易計算；要用遞推關係（recurrence）處理的，是「以紅色結尾」與「不以紅色結尾」之間的劃分。至於圓形，不過是一條兩端顏色也必須不同的直線而已。

解答

為何 $r_{n+1} = s_n$

取 $n+1$ 根柱子的一種合規塗色方法，其中第一根和最後一根柱子都是紅色。第 n 根柱子與第 $n+1$ 根柱子相鄰，而後者是紅色，所以第 n 根柱子不是紅色。因此，刪去第 $n+1$ 根柱子後，餘下的是 n 根柱子的一種合規塗色方法，其中第一根柱子是紅色而最後一根不是紅色：這正是 s_n 種塗色方法之一。

反過來，給定 n 根柱子的 s_n 種塗色方法之一，由於第 n 根柱子不是紅色，我們可以在末端加上一根紅色柱子，從而得到一種計入 r_{n+1} 的塗色方法。這兩個操作互為逆操作，所以它們給出一個一一對應（one-to-one correspondence），於是

$$r_{n+1} = s_n.$$

求 $r_n + s_n$

每一種第一根柱子為紅色的合規塗色方法，最後一根柱子不是紅色就是另一種顏色，所以 $r_n + s_n$ 就是第一根柱子為紅色的所有合規塗色方法的總數。按次序為柱子塗色。第一根是紅色（一種選擇），其後每根柱子可以塗上除前一根柱子的顏色以外的任何顏色，因此不論之前怎樣塗，每次都有 2 種選擇。故此

$$r_n + s_n = 2^{n-1}.$$

求 $r_{n+1} + r_n$

代入 $s_n = r_{n+1}$，得

$$r_{n+1} + r_n = 2^{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

歸納法

設 $P(n)$ 為命題 $r_n = \frac{1}{3}\left(2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}\right)$。（這裏用的是數學歸納法（induction）。）

基礎情況（*base case*）。只有一根柱子並塗上紅色時，這根柱子既是第一根也是最後一根，所以 $r_1 = 1$。公式給出 $\frac{1}{3}(1+2) = 1$，所以 $P(1)$ 成立。

歸納步驟（*inductive step*）。假設 $P(n)$ 對某個 $n \geq 1$ 成立。由上一個結果，

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= 2^{n-1} - r_n \\ &= \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1}}{3} \\ &= \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}, \end{aligned}$$

其中用到 $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ 和 $-(-1)^{n-1} = (-1)^n$。這正是 $P(n+1)$。根據歸納法，$P(n)$ 對所有 $n \geq 1$ 成立。

> ? **想一想** 為甚麼不由 $n = 2$ 開始歸納，或者使用兩個基礎情況？

遞推關係 $r_{n+1} = 2^{n-1} - r_n$ 只用前一項來表示每一項，所以一個基礎情況已經足夠。若是涉及前兩項的遞推關係，就需要兩個。

圍成圓形的柱子

把柱子沿圓周編號為 $1, 2, \ldots, n$，於是第 n 根柱子現在也與第 1 根柱子相鄰。一種合規的圓形塗色方法，正正就是直線 $1, 2, \ldots, n$ 的一種合規塗色方法，並且額外要求第 n 根柱子與第 1 根柱子顏色不同。

> ? **想一想** 如果第一根柱子不固定為紅色，我們怎樣數算塗色方法？

利用對稱性（symmetry）。把兩種顏色的名稱對調，會把合規塗色方法變成合規塗色方法，所以第 1 根柱子不論選哪一種顏色，塗色方法的數目都相同。當第 1 根柱子為紅色時，最後一根柱子與第一根顏色不同的直線塗色方法，正是 s_n 所計算的那些。所以圓形塗色方法的數目是

$$\begin{aligned} 3s_n &= 3\left(2^{n-1} - r_n\right) \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1} \\ &= 2^n + 2(-1)^n. \end{aligned}$$

這裏的柱子是可以區分的（它們豎立在固定的位置），所以兩種只相差一個旋轉的塗色方法會分開計算。

驗算

- 用手計算小的情況：$r_2 = 0$（兩根相鄰的柱子不能同為紅色）和 $r_3 = 2$（RWR、RBR），與 $\frac{1}{3}(2-2) = 0$ 和 $\frac{1}{3}(4+2) = 2$ 吻合。
- 三根柱子圍成三角形時必須用齊三種顏色，共有 $3! = 6$ 種方法，而 $2^3 + 2(-1)^3 = 6$。四根柱子圍成正方形則有 $16 + 2 = 18$ 種。
- 以窮舉法（brute force）數算 $n \leq 12$ 的所有塗色方法，結果與上面每一條公式都一致；例如 $r_{10} = 170$、$s_{10} = 342$，而 10 根柱子的圓形塗色方法有 1026 種。

常見錯誤

- 以 r_n 或 s_n 作為圓形的答案，忘記了第 1 根柱子不一定是紅色；因子 3 正是用來補回另外兩種顏色。
- 除以 n 來消去旋轉。柱子的位置是固定的，所以旋轉後的塗色方法是不同的塗法。

STEP 之外

圓形的答案 $2^n + 2(-1)^n$ 是圈圖（cycle graph）C_n 的色多項式（chromatic polynomial）在 $k = 3$ 時的值；一般而言，使用 k 種顏色時，這個多項式是 $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$，而同樣的「先排成直線，再把兩端接合」論證就可以證明它。色多項式以及像 $r_{n+1} + r_n = 2^{n-1}$ 這樣的遞推關係，都是組合數學（combinatorics）或圖論（graph theory）入門課程的標準內容。想做更多同類題目，可參看 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。