詳細解答

STEP II 1995，第 13 題

概率與統計 • 泊松分佈的最優化

STEP II 1995，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/95-s2-q13

關鍵思路

儘管題庫把它歸入另一個類別，這其實是一道披着商業外衣的概率題：缺席乘客的人數是一個二項（binomial）計數，試驗次數很多而成功概率極小，這正是泊松分佈（Poisson distribution）登場的時候。之後，要對整數 k 求最優值，竅門不在微積分，而在一階差分（first difference）$u_{k+1}-u_k$：只要多賣一張機票能令期望利潤（expected profit）增加，就繼續賣下去。一旦證明了這個差分是遞減的，最佳的 k 就是它首次不再為正的地方。

解答

泊松模型

假設 $N+k$ 名持票人各自獨立地以概率 ϵ 缺席。那麼缺席人數 R 服從二項分佈 $\mathrm{B}(N+k,\epsilon)$，其平均值為 $(N+k)\epsilon$。由於 k 與 N 相比非常小，這個平均值近似等於 $N\epsilon=\lambda$。試驗次數很多而成功概率極小的二項分佈，可以用平均值相同的泊松分佈很好地近似：對固定的 r，當 $n\to\infty$ 而 $n\epsilon=\lambda$ 保持不變時，

$$\binom{n}{r}\epsilon^r(1-\epsilon)^{n-r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r}\cdot\frac{\lambda^r}{r!}\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^{n-r}\ \to\ \frac{\lambda^r}{r!}\,\mathrm{e}^{-\lambda},$$

因為第一個因子趨向 1，而 $(1-\lambda/n)^n\to\mathrm{e}^{-\lambda}$。所以近似地有 $R\sim\mathrm{Po}(\lambda)$。從現在起，我們把這個分佈當作精確成立，並記

$$p_r=\mathrm{P}(R=r)=\frac{\lambda^r}{r!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

利潤

航空公司售出 $N+k$ 張機票，每張利潤為 £A，所以無論發生甚麼事，這部分都是 $A(N+k)$。若有 r 名乘客缺席，則有 $N+k-r$ 人到場，爭奪 N 個座位。

- 若 $r \geq k$，到場的人最多只有 N 個，人人都可以登機：無人需要賠償，而 $\max(0, k-r) = 0$。
- 若 $r < k$，則有 $k-r$ 人無法登機，每人令公司損失 £B，而 $\max(0, k-r) = k-r$。

兩種情況下，以英鎊計算的利潤都是 $A(N+k) - B\max(0, k-r)$。

期望利潤 $u_0, \ldots, u_3$

取期望值時，只有 $r = 0, 1, \ldots, k-1$ 對罰款有貢獻，所以

$$u_k = A(N+k) - B\sum_{r=0}^{k-1}(k-r)\,p_r.$$

代入 $p_0 = \mathrm{e}^{-\lambda}$、$p_1 = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}$ 和 $p_2 = \frac{1}{2}\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}$：

$$\begin{aligned}
u_0 &= AN,\\
u_1 &= A(N+1) - B\mathrm{e}^{-\lambda},\\
u_2 &= A(N+2) - B\mathrm{e}^{-\lambda}(2+\lambda),\\
u_3 &= A(N+3) - B\mathrm{e}^{-\lambda}\left(3 + 2\lambda + \tfrac{1}{2}\lambda^2\right).
\end{aligned}$$

差分 v_k

把一般公式相減，

$$\begin{aligned}
v_k = u_{k+1} - u_k &= A - B\left[\sum_{r=0}^{k}(k+1-r)\,p_r - \sum_{r=0}^{k-1}(k-r)\,p_r\right]\\
&= A - B\left[p_k + \sum_{r=0}^{k-1}\big((k+1-r) - (k-r)\big)p_r\right]\\
&= A - B\sum_{r=0}^{k} p_r,
\end{aligned}$$

其中第一個和式裏 $r = k$ 的一項 $(k+1-k)p_k = p_k$，在第二個和式中沒有對應的項。用文字來說，就是 $v_k = A - B\,\mathrm{P}(R \leq k)$。這是合理的：第 $(k+1)$ 張額外機票必定賺得 £A，而它恰好在該乘客最終被拒登機時才多花 £B，這種情況在 $R \leq k$ 時發生。

想一想 為甚麼方括號內的式子會化簡成單純的概率之和？

對每個 $r \le k-1$，當 k 增加一時，p_r 的係數恰好增加一（在該結果下多了一名被拒登機的乘客），而結果 $r = k$ 則開始要付一筆賠償。所以由 0 到 k 的每個 r 都各貢獻一次 p_r。

於是

$$v_k - v_{k+1} = B\,p_{k+1} = B\,\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} > 0,$$

因為 $B > 0$ 且 $\lambda > 0$。所以對每個 k 都有 $v_k > v_{k+1}$：差分嚴格遞減。

最後，$\sum_{r=0}^{k} p_r$ 是 $\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{r\ge 0}\lambda^r/r! = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = 1$ 的部分和（partial sum），所以當 $k \to \infty$ 時它趨向 1，而

$$v_k \to A - B \qquad \text{當} k \to \infty,$$

正如題目所求。由於 $B > A$，這個極限是負數。

給 Fly By Night 的建議

記 $F(k) = \mathrm{P}(R \le k) = \sum_{r=0}^{k} p_r$，則 $v_k = A - BF(k)$，而

$$u_{k+1} > u_k \iff v_k > 0 \iff F(k) < \frac{A}{B}.$$

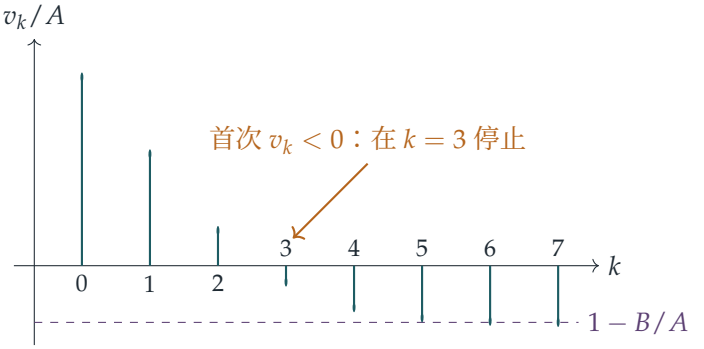
因為 v_k 嚴格遞減而極限為負，數列 $v_0, v_1, v_2, \ldots$ 在某一點之前為正，其後為負（或有一次為零）。所以 u_k 先升後降，其最大值出現在第一個令下一張機票不再有利可圖的 k：

$$\boxed{\text{選取最小的}k\text{ 使得}F(k) = \sum_{r=0}^{k}\frac{\lambda^r}{r!}\mathrm{e}^{-\lambda} \;\ge\; \frac{A}{B}.}$$

特別地，若 $\mathrm{e}^{-\lambda} \ge A/B$（乘客非常可靠，或罰款非常重），則 $v_0 \le 0$，航空公司完全不應超賣：$k = 0$。若恰好有 $F(k) = A/B$，則 $v_k = 0$，而 k 與 $k+1$ 給出相同的期望利潤。由於 $A/B < 1$ 且 $F(k) \to 1$，這樣的 k 必定存在。

所以建議是：只要最多有 k 人缺席的概率仍小於機票利潤與賠償額之比 A/B，就繼續多賣機票；到了第一個令這個概率達到 A/B 的 k 就停止。

例如，取 $\lambda = 2$ 和 $B = 1.25A$（即 $A/B = 0.8$），可得 $F(0) \approx 0.135$、$F(1) \approx 0.406$、$F(2) \approx 0.677$ 和 $F(3) \approx 0.857$，所以最佳選擇是 $k = 3$。下圖顯示這個情況下的 v_k/A。



驗算

- 由一般公式，$u_1 - u_0 = A - B\mathrm{e}^{-\lambda} = A - Bp_0$ 及 $u_2 - u_1 = A - B\mathrm{e}^{-\lambda}(1+\lambda) = A - B(p_0 + p_1)$，與 v_0 和 v_1 吻合。
- 極限情況：若 $B \to A$，則 $A/B \to 1$，k 無止境地增大（拒載幾乎沒有代價）；若 $B \to \infty$，則 $A/B \to 0$，$k = 0$。
- 數值上，我們對數百組隨機選取的 N, A, B, λ，直接由利潤公式計算 u_k，並確認了 $u_0, \ldots, u_3$ 和 v_k 的公式、$v_k - v_{k+1} = Bp_{k+1}$，以及令 u_k 最大的 k 正是滿足 $F(k) \geq A/B$ 的最小 k。當 $N = 400$、$k = 3$、$\epsilon = 0.01$ 時，有 $r = 3$ 人缺席的二項概率和泊松概率分別是 0.194 和 0.195。

常見錯誤

- 把 $r \geq k$ 的項也計入罰款的和式：這些項毫無貢獻，因為此時每個到場的人都有座位。
- 把 u_k 對 k 求導。這個變量是整數，差分 v_k 才是合適的工具。
- 把答案寫成「$v_k = 0$」。一般而言沒有任何 k 能令 v_k 恰好為零；答案是第一個令 $v_k \leq 0$ 的 k。

STEP 之外

「差分遞減，所以在它變號之處停止」這個論證，是凹函數（concave function）在導數為零處取得最大值的離散版本。「當 $\mathrm{P}(R \leq k)$ 達到 A/B 時停止」這條法則，就是運籌學（operations research）中經典的報童（newsvendor，又稱臨界分位數 critical fractile）法則，而航空公司超賣機票正是它的一個標準應用。上文嚴格證明了的二項分佈的泊松極限，是大學概率課程中最早遇到的極限定理(limit theorem)之一。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）既涵蓋泊松近似，也討論像 $\max(0, k - R)$ 這類函數的期望值。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。