詳細解答

STEP II 1995，第 12 題

概率與統計 • 連續決鬥

> **STEP II 1995，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q12

本題在 *Beyond STEP* 第 12.13 節三人決鬥中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/truel.html

關鍵思路

在一場持續到有人被擊中為止的決鬥中，每當雙方都擲不中，遊戲便「重新開始」。因此所求的概率（probability）滿足一條以它本身表示的簡單方程，根本不必求無窮級數（infinite series）之和（當然你也可以這樣做）。至於三人決鬥，Algernon 第一擲的每個選擇都很快變成二人決鬥，而第一個結果正好用來處理這些情況。出人意表的是，Algernon 的最佳一着竟是誰也不擊中。

解答

二人決鬥

設 P 為 Percy 先擲時他勝出的概率。考慮第一對投擲：

- Percy 第一擲便擊中（概率為 p），他立即勝出；
- Percy 擲不中，然後 Rodney 擊中（概率為 $(1-p)r$），Percy 落敗；
- 兩人都擲不中（概率為 $(1-p)(1-r)$），於是回到起點，仍由 Percy 先擲。各次投擲互相獨立（independent），所以由此開始 Percy 勝出的概率仍然是 P。

因此

$$P = p + (1-p)(1-r)P \quad\Longrightarrow\quad P\big(1-(1-p)(1-r)\big) = p \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{p}{p+r-pr},$$

這是因為 $1-(1-p)(1-r)=p+r-pr$，而由於 $p>0$，此式為正數。這就是所要求的結果。

想一想 遊戲是否必定會結束，使得 Percy 落敗確實等同於 Rodney 勝出？

是的。首 n 回合全部以雙方擲不中告終的概率是 $\big((1-p)(1-r)\big)^n$，由於 $p>0$，它趨向 0。換一個做法，求等比級數（geometric series）$\sum_{k\geq 0} p\big((1-p)(1-r)\big)^k$ 之和，也會得到相同的答案。

在三人決鬥中，A、B 和 C 擊中的概率分別為 $\frac{2}{5}$、$\frac{3}{5}$ 和 1。由 A 先擲的 A、B 二人決鬥會出現兩次，所以我們現在先用上面的結果，取 $p=\frac{2}{5}$、$r=\frac{3}{5}$ 把它算出來：

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{6}{25}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{19}{25}}=\frac{10}{19}.$$

第 (i) 部分

若 Algernon 擊中 Cuthbert，便只剩下 Algernon 和 Bertie，接着輪到 Bertie 擲，目標是 Algernon。只有當 Bertie 擲不中（概率為 $\frac{2}{5}$）時，Algernon 才能留在場上。之後便是由 A 先擲的 A、B 二人決鬥，Algernon 勝出的概率為 $\frac{10}{19}$。所以

$$\mathrm{P}(\text{A 勝出})=\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{19}=\frac{4}{19}.$$

第 (ii) 部分

若 Algernon 擊中 Bertie，接着輪到 Cuthbert 擲，而他只剩 Algernon 一個目標。Cuthbert 從不失手，所以 Algernon 勝出的機會是 0。

第 (iii) 部分

若 Algernon 擲不中，三人仍然全部在場。接着輪到 Bertie 擲，他瞄準 Cuthbert。

- Bertie 有 $\frac{3}{5}$ 的概率擊中 Cuthbert。這時剩下 Algernon 和 Bertie，輪到 Algernon 擲，Algernon 勝出的概率為 $\frac{10}{19}$。
- Bertie 有 $\frac{2}{5}$ 的概率擲不中。Cuthbert 隨即瞄準 Bertie，並且必定擊中他。這時剩下 Algernon 和 Cuthbert，輪到 Algernon 擲。Algernon 這一擲必須擊中，否則 Cuthbert 便會擊中他。所以他勝出的概率為 $\frac{2}{5}$。

因此

$$\mathrm{P}(\text{A 勝出})=\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{19}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{19}+\frac{4}{25}=\frac{150+76}{475}=\frac{226}{475}.$$

無論這次擲不中是怎樣造成的，是故意還是瞄準後失手，結果都一樣，因為 Bertie 和

Cuthbert 其後的打法並無分別。

Algernon 的最佳策略

> **想一想** Algernon 不能選擇擊中某人，只能選擇瞄準某人。每個選擇實際上給他帶來甚麼？

若他瞄準某人，他擊中的概率為 $\frac{2}{5}$，擲不中的概率為 $\frac{3}{5}$，而擲不中便歸入第 (iii) 部分的情況。所以：

$$\begin{aligned}
\text{瞄準 Cuthbert：}\quad & \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{19}+\frac{3}{5}\cdot\frac{226}{475}=\frac{200+678}{2375}=\frac{878}{2375}\approx 0.370,\\
\text{瞄準 Bertie：}\quad & \frac{2}{5}\cdot 0+\frac{3}{5}\cdot\frac{226}{475}=\frac{678}{2375}\approx 0.285,\\
\text{故意擲不中：}\quad & \frac{226}{475}=\frac{1130}{2375}\approx 0.476.
\end{aligned}$$

即使必定擊中 Cuthbert，也只能得到 $\frac{4}{19}=\frac{100}{475}$，比 $\frac{226}{475}$ 還要小。擊中任何一個對手都只會降低他的勝算。因此 Algernon 應該**第一擲故意擲不中**。這樣 Bertie 和 Cuthbert 便會互相攻擊，而 Algernon 可以對倖存的一方先擲。採用這個策略，他勝出的概率為 $\frac{226}{475}$，正如題目所求。

驗算

- 若 $r=0$，決鬥公式給出 1；若 $p=1$，它也給出 1，兩者都合乎預期。
- 三個選擇的排序為 $0.476>0.370>0.285$。以蒙地卡羅模擬（Monte Carlo simulation）模擬整場三人決鬥（每種策略 3×10^5 局），得出 0.476、0.369 和 0.284，與精確值吻合。
- 以第 (iii) 部分作合理性檢查：$\frac{6}{19}\approx 0.316$ 與 $\frac{4}{25}=0.16$ 相加得 0.476。

常見錯誤

- 弄錯第一擲之後的投擲次序。在第 (i) 部分，接着擲的是 Bertie，所以要待 Bertie 擲不中之後，決鬥公式才適用。
- 把「瞄準 Cuthbert」當作「擊中 Cuthbert」。第 (i)–(iii) 部分都是以結果為條件的，制訂策略時必須分別以 $\frac{2}{5}$ 和 $\frac{3}{5}$ 為它們加權。

STEP 之外

把一個概率寫成走了一步之後以它本身表示的式子，這種方法稱為首步分析（first-step analysis）。它是研究馬可夫鏈（Markov chain）的基本工具，可把到達概率（hitting probability）和期望到達時間（expected hitting time）表示為線性方程組的解。「三人決鬥」（truel）是博弈論（game theory）中一道著名的難題，當中最弱的參與者往往置身事外才最有利。想進一步了解，可參閱 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門），或 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率論導引）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。