詳細解答

STEP II 1995，第 11 題

力學 • 線性空氣阻力

STEP II 1995，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

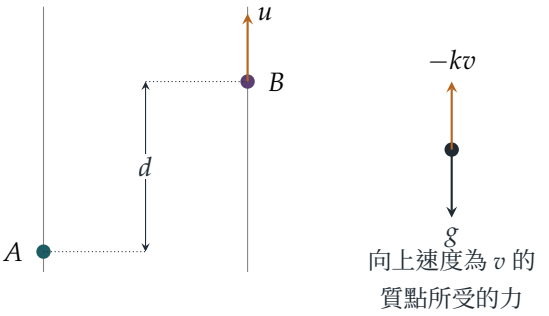
step.maths.org/questions/95-s2-q11

關鍵思路

由於阻力與速度成線性關係，運動方程（equation of motion）是線性的，而且無論質點正在上升還是下降，同一條方程都成立。因此把兩條運動方程相減：重力項互相抵消，相對速度（relative velocity）純粹按指數衰減。把它積分一次便直接得到兩者的距離，完全不必知道任何一個質點身在何處。

解答

把每個物體視為在鉛垂線上運動的單位質量質點（particle），受到重量 g 以及大小為 $k|v|$、方向與運動相反的阻力（resistance）作用。取向上為正方向，以 A 為原點，並設質點 1（由 A 出發）和質點 2（由 B 出發）在時間 t 的高度為 x_1、x_2，速度為 v_1、v_2。



運動方程

對於向上速度為 v 的質點，阻力為 $-kv$：若 $v>0$（上升），阻力向下；若 $v<0$（下降），阻力向上，兩種情況都正好是「與運動方向相反」。因此，對單位質量應用牛頓第二定律（Newton's second law），每個質點都有

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = -g - kv_1, \qquad \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = -g - kv_2,$$

對所有 $t \geq 0$ 均成立。

> **想一想** 質點 2 先上升，停下來，然後下降。難道不需要為每個階段各寫一條方程嗎？

假如阻力與速率的平方成正比，那就需要：這時的力是 $-kv|v|$，當 v 變號時，它的形式會隨之改變。但這裏的力是 $-kv$，這單一的表達式在 v 反向時已自動反向，所以一條方程便涵蓋整個運動。

相對運動

設 $w = v_2 - v_1$ 為質點 2 相對於質點 1 的速度。把兩條方程相減，重量項互相抵消：

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -kw, \qquad w(0) = u - 0 = u,$$

所以 $w = u\,\mathrm{e}^{-kt}$。現在設 $s = x_2 - x_1$，由於 B 在 A 上方高度 d 處，故 $s(0) = d$。於是 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = w$，而

$$s = d + \int_0^t u\,\mathrm{e}^{-k\tau}\,\mathrm{d}\tau = d + \frac{u}{k}\bigl(1 - \mathrm{e}^{-kt}\bigr).$$

由於 $u \geq 0$ 及 $1 - \mathrm{e}^{-kt} \geq 0$，我們有 $s \geq d > 0$：質點 2 永遠在質點 1 之上，兩個質點永不相遇。因此它們在時間 t 的距離是

$$\boxed{d + \frac{u}{k}\bigl(1 - \mathrm{e}^{-kt}\bigr)}$$

當 $t \to \infty$ 時，因為 $k > 0$，所以 $\mathrm{e}^{-kt} \to 0$，距離趨向 $d + \dfrac{u}{k}$，正如題目所求。

個別質點的運動（如果你寧願走遠路）

分別解每條方程（它是一階線性方程（first-order linear），也是可分離變量（separable）的方程），得 $v = -\frac{g}{k} + \bigl(v(0) + \frac{g}{k}\bigr)\mathrm{e}^{-kt}$，再積分一次，

$$x_1 = -\frac{gt}{k} + \frac{g}{k^2}\bigl(1 - \mathrm{e}^{-kt}\bigr),$$

$$x_2 = d - \frac{gt}{k} + \frac{1}{k}\Bigl(u + \frac{g}{k}\Bigr)\bigl(1 - \mathrm{e}^{-kt}\bigr).$$

兩式相減，gt/k 和 g/k^2 的項互相抵消，得回同一個 s。兩個質點的速度都趨近終端速度（terminal velocity）$-g/k$，這就是它們的距離最終穩定下來的原因。

驗算

- 在 $t = 0$ 時距離為 d；而當 t 很小時，距離約為 $d + ut$，與沒有阻力時的情況一樣（那時兩個質點在重力下以相同方式下墜）。
- 若 $u = 0$，兩個質點同時由靜止釋放，運動完全相同，一直相距 d，與公式吻合。
- 單位：k 的單位是 s^{-1}（每單位質量、每單位速度的力），所以 u/k 是長度。
- 數值上，以龍格－庫塔法（Runge–Kutta method）對隨機選取的 k、u、d、t 逐步求解兩條運動方程，結果與公式吻合至約 10^{-12}。取 $k = 0.5$、$u = 10$、$d = 3$，距離在 $t = 1$ 時為 10.87，在 $t = 20$ 時為 22.999，趨近 $d + u/k = 23$。

常見錯誤

- 把質點 2 的運動分成「上升」和「下降」兩個階段，並為阻力配上不同的正負號：這裏並無必要，而且經常引致正負號出錯。
- 當 v 已經是（負值的）向上速度時，仍把下降質點的阻力寫成 $+kv$，這樣便把正負號重複計算了。

STEP 之外

把方程相減這一招之所以奏效，是因為運動方程是線性的：兩個解之差滿足齊次方程（homogeneous equation）$\dot{w} = -kw$。這就是疊加原理（superposition principle），它貫穿整套線性微分方程（linear differential equations）理論，其中每個解都是「特解加餘函數」（particular solution plus complementary function）。若阻力與速率的平方成正比（quadratic drag），這個原理便不再成立，兩者的距離會有截然不同的表現。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材）闡述線性理論；Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）則討論兩種阻力下的運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。