詳細解答

STEP II 1995，第 10 題

力學 • 碰撞與恢復係數

STEP II 1995，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/95-s2-q10

關鍵思路

每一次碰撞都是一個由兩條方程組成的問題：動量守恆（conservation of momentum）和牛頓實驗定律（Newton's experimental law）。依次處理兩次碰撞，令第二個球的最終速度等於 u，然後解出 m_1；不等式則來自一個簡單的事實：質量必須是正數。至於最後一部分，留意碰撞只取決於相對速度，所以只要在一個以速率 v 運動的參考系（frame）中觀察這個運動，問題便化為第一部分。

解答

我們把各球視為質點（particle），在光滑桌面上沿同一直線運動，因此水平方向的力就只有球與球之間的衝量（impulse）。取第一個球的運動方向為正方向。



第一次碰撞

設第一次碰撞剛結束時，第一個球和第二個球的速度分別為 v_1 和 w。由動量守恆和牛頓定律（分離速率等於接近速率的 e 倍）可得

$$m_1v_1 + m_2w = m_1u, \qquad w - v_1 = eu.$$

把 $v_1 = w - eu$ 代入第一條方程，得 $(m_1 + m_2)w = m_1(1 + e)u$，所以

$$w = \frac{m_1(1+e)u}{m_1+m_2}, \qquad v_1 = \frac{(m_1 - em_2)u}{m_1+m_2}.$$

第二次碰撞

現在第二個球以速度 w 撞向靜止的第三個球。這與剛才的情況完全相同，只是 m_1, m_2, u 換成了 m_2, m_3, w，所以第二個球碰撞後的速度是

$$\frac{(m_2 - em_3)w}{m_2 + m_3}.$$

題目告訴我們這個速度等於 u。代入 w 的表達式，並約去 $u \neq 0$，得

$$\frac{(m_2 - em_3)\, m_1(1+e)}{(m_2+m_3)(m_1+m_2)} = 1, \qquad \text{所以} \qquad m_1(1+e)(m_2 - em_3) = (m_1+m_2)(m_2+m_3).$$

把含 m_1 的項合併，

$$m_1[(1+e)m_2 - e(1+e)m_3 - m_2 - m_3] = m_2(m_2+m_3),$$

而方括號內的式子可化簡為 $em_2 - m_3(1+e+e^2)$。因此

$$\boxed{m_1 = \frac{m_2(m_2+m_3)}{em_2 - m_3(1+e+e^2)}}.$$

想一想 我們手上只有一條等式，不等式從何而來？

答案來自物理：質量是正數。分子 $m_2(m_2+m_3)$ 是正數，而我們用來相除的那個方括號不可能是零（否則前一條等式就會變成 $0 = m_2(m_2+m_3)$）。所以 $m_1 > 0$ 迫使分母為正數：

$$em_2 - m_3(1+e+e^2) > 0, \qquad \text{即} \qquad m_2 e > m_3(1+e+e^2),$$

這正是所要證明的結果。

由於最後一部分要數算碰撞的次數，值得確認一下之後再沒有其他事情發生。第二次碰撞後，第二個球以速度 u 運動，而第一個球的速度是 $v_1 = u - \frac{m_2(1+e)u}{m_1+m_2} < u$，所以第一個球永遠不會再追上第二個球。第三個球則以相對速率 $ew > 0$ 遠離第二個球。因此碰撞恰好發生兩次。

最後一部分

現在三個球都有共同的速度 v，只有第一個球例外，它以 $u > v$ 的速度運動。我們在一個沿該直線以恆定速度 v 運動的參考系中觀察這個運動。在這個參考系中：

- 第一個球以 $u - v > 0$ 的速度朝第二個球運動，而第二個球和第三個球都是靜止的；
- 每次碰撞中動量仍然守恆，因為把每個速度都減去 v，動量方程兩邊的改變量相同，都是 $(m_a + m_b)v$；

- 牛頓定律保持不變，因為它只涉及速度之差。

所以在這個運動的參考系中，情況與第一部分完全一樣，只是 u 換成了 $u-v$，而各質量仍滿足同一關係式（該關係式根本不含 u）。根據第一部分，兩次碰撞之後，第二個球相對於這個參考系的速度是 $u-v$。回到桌面的參考系，我們把 v 加回去：第二個球在兩次碰撞之後的速度是

$$\boxed{u}.$$

條件 $u>v$ 保證了第一次碰撞確實會發生；至於 $v>0$ 這個假設，論證中其實用不着。

驗算

取 $e=\frac{1}{2}$、$m_3=1$ 和 $m_2=4$；則 $em_2=2>\frac{7}{4}=m_3(1+e+e^2)$，而公式給出 $m_1=\frac{4\cdot 5}{1/4}=80$。取 $u=7$，第一次碰撞後第二個球的速度是 $w=\frac{80\cdot\frac{3}{2}\cdot 7}{84}=10$，第二次碰撞後它的速度則是 $\frac{(4-\frac{1}{2})\cdot 10}{5}=7=u$，與預期相符。我們亦用電腦以分數作精確運算，對超過 10^4 組隨機選取、符合條件的質量和 e 值模擬了碰撞過程，每一次都確認碰撞恰好發生兩次、第二個球最終的速度是 u，而且把共同速度 $v<u$ 加到第二個球和第三個球上之後，最終速度同樣是 u。

常見錯誤

- 把牛頓定律的方向寫反，例如寫成 $v_1-w=eu$；在前面的球，最終的速度必定不小於後面的球。
- 在最後一部分從頭再計算各次碰撞，而沒有利用轉換參考系的方法，題目其實已明確提示可以這樣做。
- 忘記在最後把 v 加回去，以 $u-v$ 作為答案。

STEP 之外

最後一部分是伽利略不變性(Galilean invariance)的一個例子：在每一個以恆定速度運動的參考系中，碰撞定律的形式都相同，所以你可以選擇令問題最容易處理的參考系。在大學的力學課程中，最常用的選擇是質心參考系（centre-of-mass frame），在這個參考系中總動量為零，而一次碰撞只不過是把各速度反向，再乘以 e。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）在處理碰撞時大量運用了這個想法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。