詳細解答

STEP II 1995，第 1 題

純數學 • 等比級數的求導

> **STEP II 1995，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q1

關鍵思路

有限等比級數（geometric series）有閉合形式（closed form），而兩個 x 的函數之間的恆等式（identity）可以求導，從而得出新的恆等式。對 $\sum x^k$ 求導會帶出一個因子 k，這正好把等比級數變成 $\sum kx^{k-1}$；再代入 $x = -1$，便得到正負相間的符號。至於平方的情況，最簡潔的做法是讓答案的形式告訴我們 A 和 B 必須是甚麼，然後用歸納法（induction）證明。

解答

第 (i) 部分

設 $S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$。則

$$S(1-x) = (1 + x + \cdots + x^n) - (x + x^2 + \cdots + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1},$$

因為 $x, x^2, \ldots, x^n$ 每一個冪都以正號和負號各出現一次，互相抵消。若 $x \neq 1$，則 $1 - x \neq 0$，所以可以除以它：

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

這正是所求。

第 (ii) 部分

(i) 的兩邊都是在 $x \neq 1$ 上可導（differentiable）的 x 的函數，而且在該處相等，所以它們的導數也相等。左邊是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + x + \cdots + x^n) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

右邊則用商法則（quotient rule），得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

現在取 $x = -1$，這是容許的，因為 $-1 \neq 1$。左邊變成 $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1}n$，因為 kx^{k-1} 這一項變成 $(-1)^{k-1}k$。右邊變成

$$\frac{1-(n+1)(-1)^n + n(-1)^{n+1}}{4} = \frac{1-(-1)^n(2n+1)}{4},$$

當中用到 $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$。

- 若 n 是偶數，則 $(-1)^n = 1$，其值為 $\dfrac{1-2n-1}{4} = -\dfrac{n}{2}$。
- 若 n 是奇數，則 $(-1)^n = -1$，其值為 $\dfrac{1+2n+1}{4} = \dfrac{n+1}{2}$。

這就是我們要證明的結果。

第 (iii) 部分

設 $T_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2$，並假設 $T_n = (-1)^{n-1}f(n)$，其中 $f(n) = An^2 + Bn$。

> **想一想** 在未知道公式是否成立之前，我們怎樣才能求出 A 和 B？

利用我們對 T_n 唯一確知的事實：相鄰兩個和之差就是最後一項，即 $T_n - T_{n-1} = (-1)^{n-1}n^2$。由於 $T_{n-1} = (-1)^{n-2}f(n-1) = -(-1)^{n-1}f(n-1)$，上式可寫成

$$(-1)^{n-1}\big(f(n) + f(n-1)\big) = (-1)^{n-1}n^2, \qquad \text{所以} \qquad f(n) + f(n-1) = n^2.$$

代入 $f(n) = An^2 + Bn$，得

$$\begin{aligned} f(n) + f(n-1) &= An^2 + Bn + A(n-1)^2 + B(n-1) \\ &= 2An^2 + (2B - 2A)n + (A - B). \end{aligned}$$

要使這個式子對每一個 n 都等於 n^2，我們需要 $2A = 1$ 和 $B = A$，即

$$A = B = \tfrac{1}{2}, \qquad T_n = (-1)^{n-1}\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

（這些值是唯一可能的：$n=1$ 給出 $A+B=1$，而 $n=2$ 給出 $-(4A+2B)=-3$，其唯一解是 $A=B=\frac{1}{2}$。）

用歸納法證明。當 $n=1$ 時，$T_1=1=(-1)^0\cdot\frac{1\cdot 2}{2}$。假設對某個 $n\geq 2$ 有 $T_{n-1}=(-1)^{n-2}\frac{(n-1)n}{2}$。則

$$\begin{aligned}T_n=T_{n-1}+(-1)^{n-1}n^2&=(-1)^{n-1}\left(n^2-\frac{n(n-1)}{2}\right)\\&=(-1)^{n-1}\,\frac{n(n+1)}{2},\end{aligned}$$

這正是 n 時的公式。因此公式對所有 $n\geq 1$ 都成立，其中 $A=B=\frac{1}{2}$。

另一做法是把各項配對：$(2m-1)^2-(2m)^2=-(4m-1)$。當 $n=2m$ 時，由此得 $T_n=-\sum_{j=1}^{m}(4j-1)=-m(2m+1)=-\frac{n(n+1)}{2}$；當 $n=2m+1$ 時，再加上 $(2m+1)^2$，便得 $(2m+1)(m+1)=\frac{n(n+1)}{2}$。（也可以把 (ii) 的恆等式乘以 x 後再求導一次，但代數運算會繁複得多。）

驗算

當 $n=4$ 時：$1-2+3-4=-2=-\frac{4}{2}$，以及 $1-4+9-16=-10=-\frac{4\cdot 5}{2}$。當 $n=5$ 時：$1-2+3-4+5=3=\frac{6}{2}$，以及 $-10+25=15=\frac{5\cdot 6}{2}$。用電腦對 n 直至 500 驗算全部三個恆等式（例如 $T_{10}=-55$ 和 $T_{11}=66$），結果完全吻合。

還可留意 $|T_n|=1+2+\cdots+n$：平方的交錯和（alternating sum），其大小竟與首 n 個正整數的普通和相同。這個巧合令人意外，而配對的論證正好解釋了它。

常見錯誤

- 忘記了 $x=-1$ 之所以是合法的取值，全因 (i) 的恆等式對所有 $x\neq 1$ 成立；在 $x=1$ 時，右邊沒有定義。
- 處理 $(-1)^{n+1}$ 時弄錯符號：它等於 $-(-1)^n$，而不是 $(-1)^n$。
- 由 $n=1$ 和 $n=2$ 求出 A 和 B 後便停下來。這只說明了這些是唯一可能的值；要靠歸納法（或配對）才能說明公式確實對每一個 n 都成立。

STEP 之外

對 $\sum x^k$ 逐項求導，是一個威力強大的想法的有限版本：冪級數（power series）在其收斂半徑（radius of convergence）之內可以逐項求導，由此得出當 $|x|<1$ 時 $\sum kx^{k-1}=(1-x)^{-2}$。在 $x=-1$ 時，無窮級數 $1-2+3-4+\cdots$ 發散（diverges），但公式卻暗示

其值為 $\frac{1}{4}$；事實上，(ii) 的公式可以寫成 $\frac{1}{4} - (-1)^n \frac{2n+1}{4}$，所以部分和（partial sums）以 $\frac{1}{4}$ 為中心對稱地擺動。為這類發散級數賦予一個值，正是阿貝爾求和法（Abel summation）背後的想法。Abbott 的 *Understanding Analysis*（實分析入門教材）對冪級數的逐項求導有嚴謹的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。