詳細解答

STEP I 1995，第 9 題

力學 • 拋體軌道的包絡線

> **STEP I 1995，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q9

關鍵思路

固定一點 (x, y)，然後問：是否存在某個拋射角（angle of projection），使軌跡（trajectory）經過這一點？把軌跡方程用 $\tan\theta$ 而不是 θ 來表示，它就是一個關於 $\tan\theta$ 的二次方程（quadratic）。一點可以到達，當且僅當這個二次方程有實根（real root），所以整個問題歸結為判別式（discriminant）。

解答

模型

我們把粒子視為只受重力作用的質點（point mass）：沒有空氣阻力（air resistance），g 的大小和方向均不變，路徑上亦沒有任何障礙。這樣，粒子便在包含其初速度的鉛垂平面內運動；又因為只有與 O 的水平距離才有關係，由對稱性可取 $x \geq 0$，並設粒子朝 x 增加的方向拋出，與水平線所成的仰角為 θ，其中 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$。（垂直向上拋出，即 $\theta = \frac{\pi}{2}$，留待最後處理。）

軌跡

設 $u = \sqrt{2gh}$，故 $u^2 = 2gh$。加速度恆為向下的 g，經過時間 t 後

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

利用 $t = x/(u\cos\theta)$ 消去時間，並運用 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$，得

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}\,(1 + \tan^2\theta) = x\tan\theta - \frac{x^2}{4h}\,(1 + \tan^2\theta),$$

因為 $2u^2 = 4gh$。設 $T = \tan\theta$，並把全式乘以 $4h$，則軌跡經過 (x, y) 當且僅當

$$x^2T^2 - 4hx\,T + (x^2 + 4hy) = 0. \qquad (*)$$

當 θ 取遍 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 時，$T = \tan\theta$ 恰好取每個實數值一次，所以選擇一個角度等同於選擇一個實數 T。

> **想一想** 為甚麼要用 $\tan\theta$ 而不用 θ 來表示軌跡？

若以 θ 表示，方程中混雜了 sin、cos 和 $\sec^2$，處理起來很不方便。利用 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$，一切都變成單一變量 T 的多項式，而「是否存在這樣的角度？」就變成「這個二次方程有沒有實根？」，這個問題我們可以立即回答。

哪些點可以到達

取 $x > 0$。此時 $(*)$ 是一個真正關於 T 的二次方程，它有實根當且僅當其判別式非負：

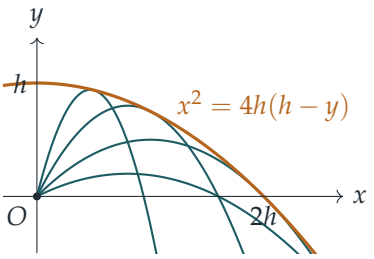
$$\begin{aligned}(4hx)^2 - 4x^2(x^2 + 4hy) \geq 0 &\iff 4x^2(4h^2 - x^2 - 4hy) \geq 0\\ &\iff x^2 \leq 4h^2 - 4hy = 4h(h - y),\end{aligned}$$

其中我們除以了 $4x^2 > 0$。因此，若 (x, y) 位於拋物線*上方*，即 $x^2 > 4h(h - y)$，或等價地 $y > h - \dfrac{x^2}{4h}$，則 $(*)$ 沒有實根，沒有任何拋射角能使粒子經過 (x, y)。

餘下要處理的是 $x = 0$，即通過 O 的鉛垂線。這條線上 $y \neq 0$ 的點，只有垂直拋射才能到達（任何其他角度都會令 $x > 0$ 對所有 $t > 0$ 成立）。以速率 u 垂直向上拋出時，粒子上升至高度 $u^2/(2g) = h$ 便不再上升，而這正是拋物線與 $x = 0$ 相交的一點。所以在這條線上，拋物線上方的點同樣無法到達。

因此，無論拋射角是多少，粒子永遠不能到達拋物線 $x^2 = 4h(h - y)$ 上方的任何一點。
■

這個界限是最佳的：當 $x^2 = 4h(h - y)$ 時，判別式為零，恰好有一個角度 $\tan\theta = 2h/x$，其路徑剛好與拋物線相切。這條拋物線是所有軌跡的*包絡線*（envelope），常稱為安全拋物線（parabola of safety）。



四條速率為 $\sqrt{2gh}$ 的軌跡（青綠色），每條都與邊界拋物線（琥珀色）相切一次。

簡化假設

- 粒子是一個質點（沒有大小，沒有自轉）。
- 忽略空氣阻力（以及重力以外的任何其他力）。
- 重力場是均勻的：g 在整個運動範圍內為常數，這亦意味着把地球表面視為平面，並忽略地球的自轉。
- 路徑不受阻擋（例如不被地面阻擋），所以粒子確實能夠到達所討論的點。

驗算

- 在 $x = 0$ 處，拋物線給出 $y = h = u^2/(2g)$，即垂直上拋的最大高度。在 $y = 0$ 上，它給出 $x = 2h = u^2/g$，即大家熟悉的水平地面上的最大射程（maximum range）（在 45° 時取得，此時 $\tan\theta = 2h/x = 1$，與預測相符）。
- 數值上，取 $g = 9.8$ 和 $h = 1.7$，我們對 399 個拋射角（由幾乎垂直向下到幾乎垂直向上）逐步模擬運動；在所有路徑上，高出拋物線的最大高度約為 -5×10^{-13}，即在捨入誤差範圍內為零；而在固定 x 之下對角度求 y 的最大值，每次都得回 $h - x^2/(4h)$。

常見錯誤

- 只考慮 θ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 範圍內的情況。位於 O 下方的點需要向下拋射（$T < 0$），論證必須涵蓋這些情況。
- 除以 x（或 x^2）時，沒有另外處理 $x = 0$ 的情況。
- 只證明了某一條特定軌跡位於拋物線之下；命題所說的是每一個角度，這正是我們固定一點而讓角度變化的原因。

STEP 之外

這裏的拋物線是單參數軌跡族的*包絡線*：即與族中每一條曲線都相切的曲線。對於曲線族 $F(x, y, T) = 0$，包絡線可由 $F = 0$ 與 $\partial F/\partial T = 0$ 消去 T 而求得；對於關於 T 的二次方程，這恰恰就是判別式等於零。包絡線還會在光學的焦散線（caustics）、一階微分方程理論（奇解，singular solutions），以及給定速率的所有拋射體的「安全區域」中再度出現。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）是進一步學習有空氣阻力和無空氣阻力的拋體運動的好選擇。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。