詳細解答

STEP I 1995，第 8 題

純數學 • 線性微分方程

> **STEP I 1995，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q8

關鍵思路

未知的是三個函數（function），但在每個固定的 x 處，它們只不過是三個數 $\mathrm{f}(x)$、$\mathrm{g}(x)$、$\mathrm{h}(x)$。把題目給出的三個解代入 $(*)$，便得到關於這三個數的三條線性方程（linear equation），我們把它們當作聯立方程（simultaneous equations）來解。至於第二段，$(*)$ 的左邊對 y 而言是線性的，所以 x、1 和 x^{-1} 的組合所得的結果，可由每一項各自產生的結果推出。

解答

求 f、g 和 h

把左邊 $y'' + \mathrm{f}(x)y' + \mathrm{g}(x)y$ 記作 Ly，於是 $(*)$ 就是 $Ly = \mathrm{h}(x)$。我們把各個解逐一代入。

- $y = 1$：這時 $y' = y'' = 0$，所以 $\mathrm{g}(x) = \mathrm{h}(x)$。
- $y = x$：這時 $y' = 1$，$y'' = 0$，所以 $\mathrm{f}(x) + x\,\mathrm{g}(x) = \mathrm{h}(x)$。
- $y = x^{-1}$：這時 $y' = -x^{-2}$，$y'' = 2x^{-3}$，所以

$$\frac{2}{x^3} - \frac{\mathrm{f}(x)}{x^2} + \frac{\mathrm{g}(x)}{x} = \mathrm{h}(x).$$

在第二條方程中使用 $\mathrm{h} = \mathrm{g}$，得 $\mathrm{f}(x) = (1-x)\,\mathrm{g}(x)$。把這兩個結果代入第三條方程，並在兩邊同乘 x^3（因為 $x > 0$，這樣做是容許的）：

$$\begin{aligned} 2 - x(1-x)\,\mathrm{g}(x) + x^2\,\mathrm{g}(x) &= x^3\,\mathrm{g}(x) \\ 2 &= \mathrm{g}(x)\left(x^3 - 2x^2 + x\right) = \mathrm{g}(x)\,x(1-x)^2. \end{aligned}$$

由於 $0 < x < 1$，因子 $x(1-x)^2$ 不等於零，所以可以用它來除。因此

$$\mathrm{g}(x) = \mathrm{h}(x) = \frac{2}{x(1-x)^2}, \qquad \mathrm{f}(x) = (1-x)\,\mathrm{g}(x) = \frac{2}{x(1-x)}.$$

在每個 x 處，我們都是一步一步解出這三條方程，過程中沒有任何自由選擇的餘地，所以符合條件的函數就只有這一組。限制 $0 < x < 1$ 使我們避開 $x = 0$ 和 $x = 1$，這些函數在該兩處會趨向無窮大。

所以這條方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x(1-x)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x(1-x)^2}y = \frac{2}{x(1-x)^2}.$$

$ax + b + c/x$ 何時是解？

算子（operator）L 是線性的：對常數 α, β，有 $L(\alpha u + \beta v) = \alpha\,Lu + \beta\,Lv$，因為求導（differentiation）是線性的，而 f、g 只是分別乘以 y' 和 y。由第一段可知

$$L(x) = L(1) = L(x^{-1}) = \mathrm{h}(x).$$

因此，對於 $y = ax + b + c/x$，

$$Ly = a\,L(x) + b\,L(1) + c\,L(x^{-1}) = (a+b+c)\,\mathrm{h}(x).$$

> **想一想** 為甚麼我們可以斷定 $a + b + c = 1$，而不僅僅是「在某個 x 處 $a + b + c = 1$」？

我們需要 $(a+b+c)\,\mathrm{h}(x) = \mathrm{h}(x)$ 對所有 $0 < x < 1$ 成立，即 $(a+b+c-1)\,\mathrm{h}(x) = 0$。但在這個區間上 $\mathrm{h}(x) = 2/\big(x(1-x)^2\big) > 0$，所以可以用它來除。因此 $y = ax + b + c/x$ 是 $(*)$ 的解，當且僅當（if and only if）

$$a + b + c = 1.$$

驗算

- 取 $(a,b,c) = (1,0,0)$、$(0,1,0)$ 或 $(0,0,1)$，便得回題目給出的三個解，而每一個都滿足 $a + b + c = 1$。
- 直接驗證：取 $x = \frac{1}{2}$，得 $\mathrm{f} = 8$，$\mathrm{g} = \mathrm{h} = 16$。對於 $y = 1/x$，有 $y = 2$，$y' = -4$，$y'' = 16$，而 $16 - 32 + 32 = 16$，符合要求。
- 電腦在 $(0,1)$ 內的 49 個有理數點上精確地檢驗了全部三個解，並對 2000 組隨機的 (a,b,c,x) 確認了 $Ly = (a+b+c)\mathrm{h}$。

常見錯誤

- 對 $y = x^{-1}$ 寫成 $y'' = -2x^{-3}$：兩個負號相乘，結果應是 $+2x^{-3}$。
- 答成 $a + b + c = 0$。那是 $ax + b + c/x$ 滿足齊次（homogeneous）方程 $Ly = 0$ 的條件；這裏右邊是 h，不是 0。

STEP 之外

這正是線性微分方程（linear differential equation）的解的結構：$Ly = \mathrm{h}$ 的任意兩個解之差都是 $Ly = 0$ 的解。這裏 $x - 1$ 和 $x^{-1} - 1$ 是齊次方程的解，而對於二階方程，兩個線性無關（independent）的解便可給出全部的解。所以 $1 + \alpha(x - 1) + \beta(x^{-1} - 1)$ 就是通解（general solution），而這恰好就是滿足 $a + b + c = 1$ 的那一族解。朗斯基行列式（Wronskian）可以把「線性無關」的意思說得精確。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）涵蓋了以上所有內容。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。