詳細解答

# STEP I 1995，第 7 題

純數學 • 三角形的向量幾何

> **STEP I 1995，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q7

## 關鍵思路

把原點設在與 $A$、$B$、$C$ 等距的一點，位置向量（position vector）$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 的長度便全部相同。整道題就靠這一個事實，因為對於長度相等的向量，$(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$。一旦發現 $Q$ 的位置向量是簡潔漂亮的 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$，兩部分都只需一兩行代數運算。

## 解答

### 選取原點

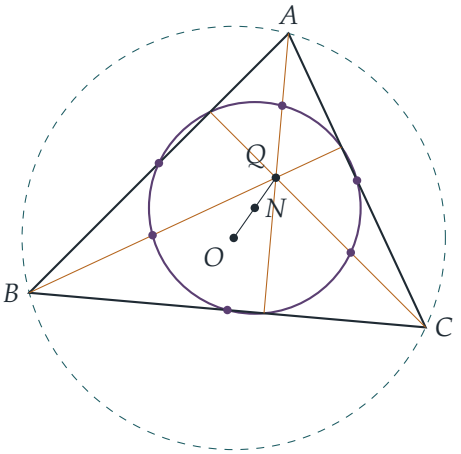
與 $A$ 和 $B$ 等距的點構成 $AB$ 的垂直平分線（perpendicular bisector），這是一條垂直於 $AB$ 的直線；$B$ 和 $C$ 的情況亦然。由於 $A$、$B$、$C$ 不共線（collinear），$AB$ 與 $BC$ 不平行，所以它們的垂直平分線也不平行。因此這兩條直線恰好相交於一點，該點與 $A$ 和 $B$ 等距，也與 $B$ 和 $C$ 等距，故與三點皆等距。（這一點就是三角形的外心（circumcentre）。）

取這一點為 $O$，以 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 表示 $A$、$B$、$C$ 的位置向量，並設 $R$ 為這個共同的距離，於是

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R.$$

形心（centroid）的位置向量為 $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$。由於 $\overrightarrow{GQ} = 2\overrightarrow{OG}$ 即 $\mathbf{q}-\mathbf{g} = 2\mathbf{g}$，

$$\mathbf{q} = 3\mathbf{g} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}, \qquad \mathbf{n} = \tfrac{1}{2}\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$




圖中所示為以 $O$ 為圓心、通過 $A$、$B$、$C$ 的圓（虛線），相交於 $Q$ 的三條高（altitude），以及以 $N$ 為圓心、半徑為 $\frac{1}{2}R$、通過第 (ii) 部分六個中點的圓。

**第 (i) 部分**

我們有 $\overrightarrow{AQ} = \mathbf{q} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 及 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$，所以

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BC} = (\mathbf{c} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = R^2 - R^2 = 0,$$

其中用了 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ 來消去交叉項。因此 $\overrightarrow{AQ}$ 垂直於 $\overrightarrow{BC}$。

? **想一想** $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 真的保證 $Q$ 在由 $A$ 作出的高上嗎？如果 $\overrightarrow{AQ}$ 是零向量（zero vector）又如何？

若 $Q \neq A$，直線 $AQ$ 通過 $A$ 且垂直於 $BC$，所以它正是由 $A$ 作出的高，而 $Q$ 在其上。若 $Q = A$（這恰好在 $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ 時發生，即 $BC$ 為直徑而 $A$ 處的角為直角），則 $Q$ 顯然在由 $A$ 作出的高上。無論哪種情況，$Q$ 都在由 $A$ 作出的高上。

以上論證並沒有對 $A$ 另眼相看：表達式 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 是對稱的，所以同理可得

$$\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CA} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = 0,$$
$$\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{AB} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 = 0,$$

故 $Q$ 也在由 $B$ 和由 $C$ 作出的高上。所以三條高都通過同一點 $Q$：它們共點（concurrent）。（$Q$ 就是垂心（orthocentre）。）

**第 (ii) 部分**

$AQ$ 的中點的位置向量為 $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{q}) = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$，所以它相對於 $N$ 的位移為

$$\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{a}.$$

$BC$ 的中點的位置向量為 $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$，所以它相對於 $N$ 的位移為

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})-\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=-\tfrac{1}{2}\mathbf{a}.$$

兩者的長度都是 $\frac{1}{2}|\mathbf{a}|=\frac{1}{2}R$。

根據同樣的對稱性，$BQ$ 和 $CA$ 的中點相對於 $N$ 的位移為 $\pm\frac{1}{2}\mathbf{b}$，而 $CQ$ 和 $AB$ 的中點則為 $\pm\frac{1}{2}\mathbf{c}$。由於 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|=R$，六個中點與 $N$ 的距離全部是 $\frac{1}{2}R$，這正是我們要證明的。事實上我們還多證了一點：$AQ$ 的中點和 $BC$ 的中點位於這個圓某條直徑的兩端，其餘兩對中點亦然。

## 驗算

- 等邊三角形：此時 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$，所以 $O$、$G$、$Q$ 和 $N$ 全部重合，而六個中點與中心的距離應該都是 $\frac{1}{2}R$。事實上，各邊中點與中心的距離為 $R\cos 60^\circ=\frac{1}{2}R$，而 $AQ$ 等的中點則位於半徑的正中。
- $A$ 處為直角：此時 $Q=A$，與上面論證所預測的一致，因為兩條直角邊本身就是通過 $A$ 的高。
- 數值上，我們隨機取了 $10^5$ 個三角形，直接計算外心，並確認了 $Q=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$、三個點積（dot product）全部為零，以及六個中點與 $N$ 的距離全部是 $\frac{1}{2}R$，最大相對誤差約為 $10^{-13}$。

## 常見錯誤

- 把 $\overrightarrow{GQ}=2\overrightarrow{OG}$ 讀成 $\mathbf{q}=2\mathbf{g}$。它說的是 $\mathbf{q}-\mathbf{g}=2\mathbf{g}$，所以 $\mathbf{q}=3\mathbf{g}$。
- 只證明了一個垂直關係便停筆。要證明共點，$Q$ 必須在全部三條高上；應明確寫出同樣的計算對 $B$ 和 $C$ 也成立。
- 忘記說明原點為何可以這樣選：這一點之所以存在，是因為兩條不平行的邊的垂直平分線必定相交。

## STEP 之外

由於 $\mathbf{q}=3\mathbf{g}$ 及 $\mathbf{n}=\frac{3}{2}\mathbf{g}$，$O$、$G$、$N$、$Q$ 四點全在同一條直線上，這條直線稱為歐拉線（*Euler line*），且 $OG:GQ=1:2$。第 (ii) 部分的圓就是九點圓（*nine-point circle*）：它還通過三條高的垂足（圖中可見），因為每個垂足對某條直徑（例如由 $AQ$ 的中點至 $BC$ 的中點的那一條）所張的角都是直角。巧妙地選取原點，讓一個對稱的表達式代勞，是向量幾何和線性代數（linear algebra）中反覆出現的技巧；Strang 的 *Introduction to Linear*

*Algebra*（線性代數入門教材）進一步發展了向量和點積的工具，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 進階題集）則有更多同類風格的 STEP 式幾何題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。