詳細解答

STEP I 1995，第 6 題

純數學 • 伯努利微分方程

> **STEP I 1995，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q6

關鍵思路

兩條方程對 y 而言都不是線性的，但各自對 $1/y$ 的某個適當冪次卻是線性的。左邊含有 y'/y^2，它（除正負號外）正是 $1/y$ 的導數（derivative）；因此設 $u = 1/y$，方程便化為關於 u 的一階線性方程（first-order linear equation），再用積分因子（integrating factor）即可解決。在第 (ii) 部分，y'/y^3 一項提示我們應改為考慮 $1/y^2$。

解答

第 (i) 部分

設 $u = 1/y$。由鏈式法則（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

所以方程的第一項恰好是 $-\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$，而第二項是 u。方程變成

$$-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = \mathrm{e}^{2x}, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u = -\mathrm{e}^{2x}.$$

這對 u 而言是線性的。積分因子是 $\mathrm{e}^{\int -1\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x}$，全式乘以它便得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u\,\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \mathrm{e}^{-x}u = -\mathrm{e}^{x}.$$

兩邊積分，其中 A 為任意常數（arbitrary constant），

$$u\,\mathrm{e}^{-x} = A - \mathrm{e}^{x}, \qquad \text{所以} \qquad u = A\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}.$$

由於 $y = 1/u$，

$$y = \frac{1}{A\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}},$$

這就是所求的通解（general solution）。（原方程含有 $1/y$，所以自始至終 $y \neq 0$，代換不會遺漏任何解；此公式在任何滿足 $Ae^{x} \neq e^{2x}$ 的區間上都成立，即當 $A > 0$ 時須避開 $x = \ln A$。）

第 (ii) 部分

> **想一想** 這裏哪一個代換能擔當 $u = 1/y$ 的角色？

我們希望新變量的導數能產生 y'/y^3。由於

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{2}{y^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

正確的選擇是 $v = 1/y^2$。於是第一項是 $-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，第二項是 v，所以

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = e^{2x}, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 2v = -2e^{2x}.$$

這次積分因子是 e^{-2x}：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v\,e^{-2x}) = -2e^{2x}\cdot e^{-2x} = -2.$$

兩邊積分，其中 B 為任意常數，

$$v\,e^{-2x} = B - 2x, \qquad \text{所以} \qquad \frac{1}{y^2} = (B - 2x)\,e^{2x}.$$

因此

$$y^2 = \frac{e^{-2x}}{B - 2x}, \qquad y = \pm\frac{e^{-x}}{\sqrt{B - 2x}}.$$

因為 $1/y^2 > 0$，我們需要 $B - 2x > 0$：解只在 $x < \frac{1}{2}B$ 時存在，而正負號則由 y 最初的符號決定（它不可能變號，因為 y 永不為零）。與第 (i) 部分不同，答案並非兩個指數函數（exponential）之差：這裏右邊的 e^{2x} 恰好與積分因子 e^{-2x} 互相抵消，剩下一個常數待積分，這就是線性項 $-2x$ 出現的原因。

驗算

- 代回 (ii)：由 $1/y^2 = (B - 2x)e^{2x}$，求導得 $-2y'/y^3 = -2e^{2x} + 2(B - 2x)e^{2x}$，所以 $y'/y^3 = e^{2x} - 1/y^2$，這正是原方程。
- 數值檢驗：在 (ii) 中取 $y(0) = 1$ 得 $B = 1$，於是公式預測 $y(0.4) = e^{-0.4}/\sqrt{0.2} \approx 1.49888$。由 $x = 0$ 開始以數值方法逐步求解該微分方程（differential equation），所得的值與此相同，準確至小數點後十位。兩個通解在許多隨機選取的點和常數下，亦都滿足各自的方程。

常見錯誤

- 在 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 中漏掉負號（或第 (ii) 部分的因子 2），令整條線性方程出錯。
- 在第 (ii) 部分只寫正平方根，或沒有留意到解須滿足 $x < \frac{1}{2}B$。

STEP 之外

兩條方程都是伯努利方程（Bernoulli equation）$y' + P(x)y = Q(x)y^n$ 的例子：除以 y^n 並代入 $u = y^{1-n}$，總能得到一條線性方程。這裏第 (i) 部分是 $n = 2$，第 (ii) 部分是 $n = 3$。解可以在有限的 x 處「爆破」（blow up）（例如 $x \to \frac{1}{2}B$ 時），這是非線性方程（nonlinear equation）的典型特徵，在常微分方程（ODE）的入門課程中會學到；參見 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。