詳細解答

STEP I 1995，第 5 題

純數學 • 二項式級數與積分

STEP I 1995，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/95-s1-q5

關鍵思路

對多項式逐項求導（differentiating term by term），可以消去麻煩的 $1/r$ 因子，剩下的幾乎就是一個二項展開式（binomial expansion）：係數 $(-1)^{r+1}\binom{n}{r}$ 正好是 $-(1-x)^n$ 去掉常數項後的係數。一旦求得 f'，微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）（連同 $\mathrm{f}(0)=0$）便把 f 表示成一個積分，再用代換（substitution）$y=1-t$ 就可化成所要求的形式。那裏的被積函數（integrand）是一個等比級數（geometric series），可以立即積分。

解答

導數

記

$$\mathrm{f}(x)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\binom{n}{r}\frac{x^r}{r}.$$

這是一個多項式，所以可以逐項求導：

$$\mathrm{f}'(x)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\binom{n}{r}x^{r-1}.$$

當 $x \neq 0$ 時，乘以 x 並利用 $(-1)^{r+1}x^r = -(-x)^r$：

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{f}'(x) &= -\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r}(-x)^r \\ &= -\Big(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}(-x)^r - 1\Big) \\ &= 1-(1-x)^n, \end{aligned}$$

這裏用了二項式定理（binomial theorem）。除以 x，得

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1-(1-x)^n}{x} \qquad (x \neq 0),$$

正是所求。（在 $x = 0$ 處，由級數得 $\mathrm{f}'(0) = n$，這也是右邊當 $x \to 0$ 時的極限，因為 $1-(1-x)^n = nx + O(x^2)$。）

積分公式

f 的每一項都含有因子 x，所以 $\mathrm{f}(0) = 0$。由微積分基本定理，

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(0) + \int_0^x \mathrm{f}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-(1-t)^n}{t}\,\mathrm{d}t.$$

想一想 公式的分母含有 t，積分時穿過 $t = 0$ 是否穩妥？

穩妥。被積函數其實就是多項式 $\mathrm{f}'(t)$；那個分數只是它在 $t \neq 0$ 時的一種簡潔寫法，而它在 $t = 0$ 處的值就是極限 n。所以這裏並沒有奇點（singularity），只是公式中有一個可去的缺口。

現在作代換 $y = 1 - t$，於是 $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}y$；當 $t = 0$ 時 $y = 1$，當 $t = x$ 時 $y = 1 - x$。於是

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= \int_1^{1-x} \frac{1-y^n}{1-y}\,(-\mathrm{d}y) \\ &= \int_{1-x}^{1} \frac{1-y^n}{1-y}\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

其中把積分上下限對調，以抵消負號。這就是所要求的結果，而且對任何實數 x 都成立。

$\mathrm{f}(1)$ 的值

取 $x = 1$，則積分下限為 0。當 $y \neq 1$ 時，被積函數是一個等比級數之和，

$$\frac{1-y^n}{1-y} = 1 + y + y^2 + \cdots + y^{n-1},$$

而（一如前述）它在 $y=1$ 處的值是極限 n，所以在整個 $[0,1]$ 上，被積函數就是這個多項式。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(1) &= \int_0^1 (1+y+\cdots+y^{n-1})\,\mathrm{d}y \\ &= \left[y+\frac{y^2}{2}+\cdots+\frac{y^n}{n}\right]_0^1 \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\end{aligned}$$

正是所求。

留意這個結果的含義：在原來的級數中代入 $x=1$，便得到一個令人驚訝的恆等式

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r+1}}{r}\binom{n}{r} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

若要直接看出，絕不容易。

驗算

- $n=1$：$\mathrm{f}(x)=x$，而 $\big(1-(1-x)\big)/x = 1 = \mathrm{f}'(x)$；同時 $\mathrm{f}(1)=1$。
- $n=4$：$\mathrm{f}(1) = 4-\frac{6}{2}+\frac{4}{3}-\frac{1}{4} = \frac{25}{12} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$。
- 我們在 300 個隨機有理點上精確地驗證了導數公式，又對隨機的 $x\in[-1.5,1.5]$ 和 $n\le 15$ 把積分（用辛普森法則（Simpson's rule）計算）與級數比較（相對誤差小於 10^{-11}），並對每個 $n\le 40$ 精確地確認了關於 $\mathrm{f}(1)$ 的恆等式。

常見錯誤

- 與 $(1-x)^n$ 的二項展開式對照時，忘記了 $r=0$ 那一項：由 $r=1$ 開始的和是 $(1-x)^n-1$，而不是 $(1-x)^n$。
- 寫出 $\mathrm{f}(x)=\int_0^x \mathrm{f}'(t)\,\mathrm{d}t$ 而沒有指出 $\mathrm{f}(0)=0$。
- 作代換 $y=1-t$ 之後把積分上下限的次序弄反：正是 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}y$ 的負號把上下限調回來。

STEP 之外

$H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 這些數稱為調和數（harmonic numbers）；它們的增長速度與 $\ln n$ 相若，而 $H_n-\ln n$ 趨向歐拉常數（Euler's constant）$\gamma\approx 0.5772$。這裏所用的技巧，即先求導以消去麻煩的分母，然後再積分回去，正是推導 $\ln(1+x)$ 和 $\tan^{-1}x$ 的冪級數

（power series）時所用的方法；而它對無窮級數是否成立的論證（冪級數的逐項求導），是大學一年級分析學（analysis）的核心課題。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對此有嚴謹的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。