詳細解答

STEP I 1995，第 4 題

純數學 • 棣美弗定理

> **STEP I 1995，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q4

關鍵思路

棣美弗定理（de Moivre's theorem）把 $\sin 5\theta$ 化為 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^5$ 的虛部（imaginary part），而二項式定理（binomial theorem）則把這個冪展開成 $\cos\theta$ 與 $\sin\theta$ 的乘積。虛部的每一項都含有 $\sin\theta$ 的奇數次冪，所以我們可以抽出一個因子，再利用 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ 把餘下的部分化為餘弦。接着，角 $\frac{1}{5}\pi$ 之所以特別，是因為在該處 $\sin 5\theta = 0$，於是剩下一條關於 $\cos^2\theta$ 的二次方程（quadratic equation）。

解答

恆等式

設 $c = \cos\theta$ 及 $s = \sin\theta$。由棣美弗定理，

$$\cos 5\theta + \mathrm{i}\sin 5\theta = (c + \mathrm{i}s)^5.$$

由二項式定理，係數為 $1, 5, 10, 10, 5, 1$，

$$(c + \mathrm{i}s)^5 = c^5 + 5c^4(\mathrm{i}s) + 10c^3(\mathrm{i}s)^2 + 10c^2(\mathrm{i}s)^3 + 5c(\mathrm{i}s)^4 + (\mathrm{i}s)^5.$$

由於 $\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$、$\mathrm{i}^4 = 1$ 及 $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$，虛數項就是含 $\mathrm{i}s$ 奇數次冪的各項：

$$\mathrm{Im}(c + \mathrm{i}s)^5 = 5c^4 s - 10c^2 s^3 + s^5.$$

c 和 s 都是實數，所以比較虛部可得

$$\begin{aligned}\sin 5\theta &= s\left(5c^4 - 10c^2s^2 + s^4\right)\\ &= s\left(5c^4 - 10c^2(1-c^2) + (1-c^2)^2\right)\\ &= s\left(5c^4 - 10c^2 + 10c^4 + 1 - 2c^2 + c^4\right)\\ &= s\left(16c^4 - 12c^2 + 1\right),\end{aligned}$$

其中第二行用了 $s^2 = 1 - c^2$。也就是說，

$$\sin 5\theta = \sin\theta\left(16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1\right),$$

這正是所要證明的恆等式（identity）。

求 $\cos^2\frac{1}{5}\pi$ 的值

取 $\theta = \frac{1}{5}\pi$。這時 $\sin 5\theta = \sin\pi = 0$，而 $\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$（因為 $0 < \frac{1}{5}\pi < \pi$）。所以我們可以把恆等式兩邊除以 $\sin\theta$，於是 $x = \cos^2\frac{1}{5}\pi$ 滿足

$$16x^2 - 12x + 1 = 0, \qquad \text{所以} \qquad x = \frac{12 \pm \sqrt{144-64}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

想一想 這條二次方程有兩個根。哪一個才是 $\cos^2\frac{1}{5}\pi$？

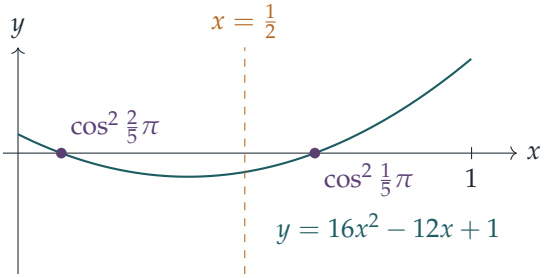
要選出正確的根，我們還需要多一項關於 $\cos\frac{1}{5}\pi$ 的事實。由於 $0 < \frac{1}{5}\pi < \frac{1}{4}\pi$，而 cos 在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上遞減，我們有 $\cos\frac{1}{5}\pi > \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$，所以

$$\cos^2\tfrac{1}{5}\pi > \tfrac{1}{2}.$$

現在由 $\sqrt{5} < 3$ 得 $\frac{3-\sqrt{5}}{8} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$，而由 $\sqrt{5} > 1$ 得 $\frac{3+\sqrt{5}}{8} > \frac{1}{2}$。恰好只有一個根大於 $\frac{1}{2}$，所以

$$\cos^2\tfrac{1}{5}\pi = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

（另一個根並非多餘的假根：當 $\theta = \frac{2}{5}\pi$ 時同樣有 $\sin 5\theta = 0$ 及 $\sin\theta \neq 0$，而 $\cos^2\frac{2}{5}\pi = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$。）



推導 $\cos\frac{1}{5}\pi$

由於 $0 < \frac{1}{5}\pi < \frac{1}{2}\pi$，$\cos\frac{1}{5}\pi > 0$，所以我們取正平方根：

$$\cos\tfrac{1}{5}\pi = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}.$$

最後，$(1+\sqrt{5})^2 = 1+2\sqrt{5}+5 = 6+2\sqrt{5}$ 而且 $1+\sqrt{5} > 0$，所以 $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = 1+\sqrt{5}$，於是

$$\cos\tfrac{1}{5}\pi = \tfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right),$$

這正是所要求的結果。

驗算

- 當 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 時，恆等式給出 $\sin\frac{5}{2}\pi = 1\cdot(0-0+1) = 1$，結果正確。當 θ 很小時：兩邊都約等於 5θ，因為括號內的式子趨向 $16-12+1=5$。
- 以數值計算，$\cos 36^\circ \approx 0.809017$ 而 $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) \approx 0.809017$；另外 $\cos^2 36^\circ \approx 0.654508 = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$。我們亦在 10^4 個隨機角度上檢驗過這個恆等式。
- $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ 是黃金比（golden ratio）φ 的一半，而黃金比正是正五邊形的對角線與邊長之比，這與 36° 這個角所暗示的一致。

常見錯誤

- 忘記 i 的冪所帶來的正負號：s^3 項帶有 $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$，因而得到 $-10c^2s^3$。
- 毫無理由地選定二次方程的其中一個根。你需要一個不等式（inequality），例如 $\cos^2\frac{1}{5}\pi > \frac{1}{2}$，才能排除 $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$。
- 除以 $\sin\theta$ 時沒有指出 $\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$。

STEP 之外

用同樣的方法，可以把 $\sin n\theta / \sin\theta$ 和 $\cos n\theta$ 寫成 $\cos\theta$ 的多項式，即切比雪夫多項式（Chebyshev polynomials），它們在數值分析（numerical analysis）中隨處可見。$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/5}$ 這些數是五次單位根（fifth roots of unity），而 $\cos\frac{1}{5}\pi$ 只涉及平方根這一事實，正是正五邊形可以用尺規作圖（ruler-and-compasses construction）的原因；高斯（Gauss）關於哪些正多邊形可以尺規作圖的定理，是大學本科伽羅瓦理論（Galois theory）的一大亮點。至於棣美弗定理背後的幾何，可參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。