詳細解答

STEP I 1995，第 3 題

純數學 • 裂項相消級數

> **STEP I 1995，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q3

關鍵思路

當一個和式中相鄰各項有大部分內容相同時，把每一項寫成差 $\mathrm{f}(r)-\mathrm{f}(r-1)$ 的形式，幾乎所有東西都會互相抵消：這個和式會裂項相消（telescope）。功夫在於選取 f，使這個差恰好是你想要的那一項；本題已替我們選好了。至於交錯級數（alternating series），竅門是把它寫成全部立方之和減去偶數立方之和的兩倍，於是第 (ii) 部分的結果可以用上兩次。

解答

第 (i) 部分

把和式完整寫出：

$$\sum_{r=1}^{n}\{\mathrm{f}(r)-\mathrm{f}(r-1)\}=\{\mathrm{f}(1)-\mathrm{f}(0)\}+\{\mathrm{f}(2)-\mathrm{f}(1)\}+\cdots+\{\mathrm{f}(n)-\mathrm{f}(n-1)\}.$$

$\mathrm{f}(1),\mathrm{f}(2),\ldots,\mathrm{f}(n-1)$ 每一個都帶正號出現一次、帶負號出現一次，所以全部抵消。餘下的只有第一個括號中的 $-\mathrm{f}(0)$ 和最後一個括號中的 $\mathrm{f}(n)$，得出 $\mathrm{f}(n)-\mathrm{f}(0)$，正是所求。

如果你想要比「全部抵消」更嚴謹的說法，可以對 n 使用歸納法（induction）。當 $n=1$ 時，和為 $\mathrm{f}(1)-\mathrm{f}(0)$。若結果對 $n=k$ 成立，則加上下一項後得

$$\mathrm{f}(k)-\mathrm{f}(0)+\mathrm{f}(k+1)-\mathrm{f}(k)=\mathrm{f}(k+1)-\mathrm{f}(0),$$

這就是 $n=k+1$ 時的結果。因此結果對所有 $n\geq 1$ 成立。

第 (ii) 部分

取 $\mathrm{f}(r) = r^2(r+1)^2$，則 $\mathrm{f}(r-1) = (r-1)^2r^2$。兩者都含有因子 r^2，所以把它抽出，再運用平方差（difference of two squares）：

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(r) - \mathrm{f}(r-1) &= r^2[(r+1)^2 - (r-1)^2] \\ &= r^2[(r+1)+(r-1)][(r+1)-(r-1)] \\ &= r^2 \cdot 2r \cdot 2 = 4r^3.\end{aligned}$$

現在由 $r = 1$ 加至 n，並應用第 (i) 部分。由於 $\mathrm{f}(0) = 0$，

$$4\sum_{r=1}^{n} r^3 = \mathrm{f}(n) - \mathrm{f}(0) = n^2(n+1)^2, \qquad \text{所以} \qquad \boxed{\sum_{r=1}^{n} r^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2.}$$

第 (iii) 部分

這個級數（series）共有 $2n+1$ 項：奇數的立方帶正號，偶數的立方帶負號，最後一項是奇數立方 $(2n+1)^3$。

想一想 只用 $\sum r^3$ 的公式，怎樣處理正負交錯的符號？

先考慮直到 $(2n+1)^3$ 為止的全部立方之和。當中每個偶數立方都帶正號，而我們想要的是負號，所以把每個偶數立方減去兩次：

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - \cdots + (2n+1)^3 = \sum_{k=1}^{2n+1} k^3 - 2\sum_{m=1}^{n} (2m)^3.$$

偶數立方為 $(2m)^3 = 8m^3$，其中 $m = 1, \ldots, n$，最大的是 $(2n)^3$。運用第 (ii) 部分兩次，其中一次以 $2n+1$ 代替 n，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+1} k^3 - 16\sum_{m=1}^{n} m^3 &= \tfrac{1}{4}(2n+1)^2(2n+2)^2 - 16 \cdot \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ &= (2n+1)^2(n+1)^2 - 4n^2(n+1)^2 \\ &= (n+1)^2[(2n+1)^2 - (2n)^2] \\ &= (n+1)^2(4n+1),\end{aligned}$$

其中第二行用了 $(2n+2)^2 = 4(n+1)^2$，最後一行則用了平方差 $(2n+1)^2 - (2n)^2 = (2n+1+2n) \cdot 1$。因此

$$\boxed{1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(4n+1).}$$

驗算

- 當 $n = 0$ 時，級數只有 $1^3 = 1$，而 $(0+1)^2(0+1) = 1$。
- 當 $n = 1$ 時：$1 - 8 + 27 = 20$，而 $2^2 \times 5 = 20$。
- 當 $n = 2$ 時：$1 - 8 + 27 - 64 + 125 = 81$，而 $3^2 \times 9 = 81$。
- 答案的增長應與 $(2n+1)^3/2$ 相若，即大約是最後一項的一半，因為各項可配對成 $(2m+1)^3 - (2m)^3 \approx 12m^2$。事實上 $(n+1)^2(4n+1) \approx 4n^3$，與 $\sum 12m^2 \approx 4n^3$ 吻合。

我們亦以直接求和的方法，對由 0 至 199 的每一個 n 驗證了第 (ii) 和第 (iii) 部分。

常見錯誤

- 只把偶數立方減去一次，得出 $\sum k^3 - \sum(2m)^3$，這是奇數立方之和，而不是交錯和。
- 把偶數立方取到 $(2n+2)^3$，或在全部立方之和的公式中用了 n 而不是 $2n+1$：要仔細數清楚項數。

STEP 之外

第 (i) 部分是微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）的離散版本：差 $\mathrm{f}(r) - \mathrm{f}(r-1)$ 扮演導數（derivative）的角色，把它求和便可還原 f，正如對 F' 積分會得出 $F(b) - F(a)$ 一樣。這套「有限差分演算」（calculus of finite differences）讓你只要找到合適的 f，就能求出任何多項式的和；而同樣的裂項相消思想，也是許多級數收斂（convergence）證明的基礎。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）有更多關於裂項相消和這類級數的練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。