詳細解答

# STEP I 1995，第 2 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 1995，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q2

## 關鍵思路

在第 (i) 部分，兩個積分（integral）單獨來看都不易處理，但兩者卻是天作之合：相加後得到的分式可約簡為 1，相減後得到的分子恰好是分母的導數（derivative）。兩個容易的積分，給出關於 $S$ 和 $T$ 的兩條聯立方程（simultaneous equations）。在第 (ii) 部分，選用代換（substitution）$x = \sin^2 t$，是因為它把 $\frac{1}{x} - 1$ 化為完全平方 $\cot^2 t$，令平方根消失；其後全靠倍角公式（double-angle formulae）便可完成。

## 解答

### 第 (i) 部分

把兩個被積函數（integrand）相加，

$$S + T = \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + c_1.$$

把兩者相減，

$$S - T = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x.$$

分子正是分母的導數，因為 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x + \sin x) = -\sin x + \cos x$。所以這個積分屬於 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ 的形式，而

$$S - T = \ln|\cos x + \sin x| + c_2.$$

把這兩條方程相加、相減，再除以二，

$$S = \tfrac{1}{2}(x + \ln|\cos x + \sin x|) + C,$$
$$T = \tfrac{1}{2}(x - \ln|\cos x + \sin x|) + C',$$

其中 $C$ 和 $C'$ 為任意常數（arbitrary constants）。在任何滿足 $\cos x + \sin x \neq 0$ 的區間上，被積函數均有定義，以上結果亦在該區間上成立。

### 第 (ii) 部分

設 $I$ 為所求的積分。取 $x = \sin^2 t$，則 $\mathrm{d}x = 2\sin t \cos t \,\mathrm{d}t$。至於積分上下限（limits），$x = \frac{1}{4}$ 給出 $\sin t = \frac{1}{2}$，所以 $t = \frac{\pi}{6}$；而 $x = \frac{1}{2}$ 給出 $\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}$，所以 $t = \frac{\pi}{4}$。（我們取 $t$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 內；當 $t$ 走遍這個區間時，$x$ 由 $\frac{1}{4}$ 遞增至 $\frac{1}{2}$。）

接着處理平方根：

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

? **想一想** 為甚麼平方根是 $\cos t / \sin t$，而不是 $|\cos t / \sin t|$？

一般而言，$\sqrt{\cot^2 t} = |\cot t|$。但當 $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ 時，$\sin t$ 和 $\cos t$ 皆為正數，所以 $\cot t > 0$，絕對值（modulus）符號可以略去。這正是我們選取 $t$ 在第一象限（first quadrant）的原因。

代入後，$\sin t$ 互相約去：

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} (1 - 4\sin^2 t) \frac{\cos t}{\sin t} 2\sin t \cos t \,\mathrm{d}t = \int_{\pi/6}^{\pi/4} 2\cos^2 t \,(1 - 4\sin^2 t) \,\mathrm{d}t.$$

現在利用倍角公式，令這個積分變得容易計算。由於 $2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$ 及 $8\sin^2 t \cos^2 t = 2\sin^2 2t = 1 - \cos 4t$，

$$2\cos^2 t - 8\sin^2 t \cos^2 t = (1 + \cos 2t) - (1 - \cos 4t) = \cos 2t + \cos 4t.$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} (\cos 2t + \cos 4t) \,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2t + \tfrac{1}{4}\sin 4t\right]_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{4}\sin\pi\right) - \left(\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{4} + \tfrac{\sqrt{3}}{8}\right), \end{aligned}$$

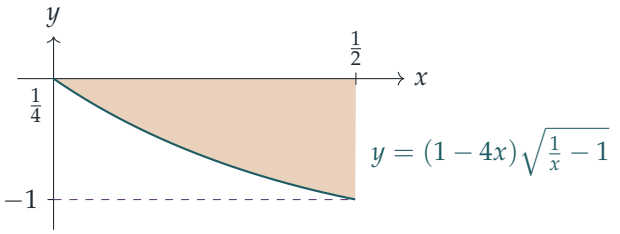
所以

$$\int_{1/4}^{1/2} (1 - 4x)\sqrt{\frac{1}{x} - 1} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{8}.$$

## 驗算

- 正負號：在 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 上，$1 - 4x < 0$ 而平方根為正，所以被積函數為負，$I$ 必為負數。果然 $4 - 3\sqrt{3} \approx -1.196$，所以 $I \approx -0.1495$。下圖顯示被積函數的圖像。

- 把辛普森法則（Simpson's rule）直接應用於原來的積分，得出 $-0.149519\ldots$，與 $\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 吻合至小數點後十個位。
- 至於第 (i) 部分，求導驗證：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}\big(x+\ln(\cos x+\sin x)\big) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right) = \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$。例如在 $[0,1]$ 上，$S$ 和 $T$ 的數值均與數值積分（quadrature）的結果相符（0.66168 和 0.33832）。




## 常見錯誤

- 忘記把上下限改為 $t=\frac{\pi}{6}$ 和 $t=\frac{\pi}{4}$，或在代回 $x$ 時出錯。
- 漏掉 $\mathrm{d}x$ 中的因子 $2\sin t\cos t$，或寫成 $\mathrm{d}x=2\sin t\,\mathrm{d}t$。
- 得出正數答案：被積函數在整個區間上都是負數，所以答案若為正值，即表示正負號出了錯。

## STEP 之外

第 (i) 部分的技巧，是替一個棘手的積分找一個「拍檔」，使兩者之和與差都容易計算。這個技巧一再出現，例如用於 $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$，而它的複數形式則是對 $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ 積分。第 (ii) 部分是一個普遍原則的小例子：選得恰當的代換，可以把代數形式的被積函數化為三角多項式（trigonometric polynomial），而這正是傅立葉級數（Fourier series）的起點。想看更多這類風格的積分，並附有細緻的討論，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。