詳細解答

STEP I 1995，第 12 題

概率與統計 • 排列與計數

> **STEP I 1995，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q12

關鍵思路

n 名學生的每一種排列（arrangement）出現的機會均等，所以每個概率（probability）都等於有利排列的數目除以 $n!$。更好的做法是利用對稱性（symmetry）：我們只需關心曲棍球員佔據了哪些位置，而 $\binom{n}{r}$ 個由 r 個位置組成的集合，每一個出現的機會都相同。於是每一部分都變成一個關於選取位置的計數問題。至於最後一部分，題目中關於空隙的提示正是標準的「隔板法」（stars and bars）技巧：先把非曲棍球員排成一列，曲棍球員就必須分別放進他們之間不同的空隙。

解答

以下一律把 r 名曲棍球員記作 H，其餘 $n-r$ 名學生記作 N。把學生視為可區分的，則全部 $n!$ 種排序出現的機會均等。由於 H 所佔的每一個 r 個位置的集合，都對應相同數目的排序，即 $r!\,(n-r)!$ 種，所以 H 所佔位置的集合，等可能地是 $\binom{n}{r}$ 個可能集合中的任何一個。以下哪一種觀點較方便，我們就用哪一種。

第 (i) 部分

先填兩端的位置。左端的學生是曲棍球員的概率為 $\frac{r}{n}$。在此條件下，右端的學生是餘下 $n-1$ 名學生的其中一人，各人機會均等，而當中有 $r-1$ 人打曲棍球。所以

$$\mathrm{P}(\text{兩端都是曲棍球員}) = \frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1} = \frac{r(r-1)}{n(n-1)}.$$

（要這個概率不為零，需要 $r \geq 2$，而題目已保證這一點。）

第 (ii) 部分

曲棍球員全部站在一起，當且僅當他們的位置構成連續 r 個位置的一段。這樣的一段可以由第 $1, 2, \ldots, n-r+1$ 個位置開始，所以在 $\binom{n}{r}$ 個位置集合之中，有 $n-r+1$ 個是有利的：

$$\mathrm{P}(\text{全部站在一起}) = \frac{n-r+1}{\binom{n}{r}} = \frac{r!\,(n-r+1)!}{n!}.$$

另一個等價的做法，是把 r 名曲棍球員黏合成一個「超級學生」：$n-r+1$ 個單位共有 $(n-r+1)!$ 種排序，而該段內部有 $r!$ 種排序，得出相同的答案。作為驗算，當 $r=n$ 時這個概率為 1，正如所料。

第 (iii) 部分

先讓 $n-r$ 名非曲棍球員排成一列。他們造成 $n-r+1$ 個空隙：第一人之前有一個，每對相鄰的人之間各有一個，最後一人之後有一個。



沒有兩名曲棍球員相鄰，當且僅當每個空隙最多放入一名曲棍球員。（若兩個 H 在同一個空隙，他們便會相鄰；若他們在不同的空隙，則至少有一個 N 把他們隔開。）因此，有利的排列對應於從 $n-r+1$ 個空隙中選出 r 個，每個選中的空隙放一個 H。

以位置來計數：一個有利的 H 位置集合，完全取決於用了哪 r 個空隙，所以共有 $\binom{n-r+1}{r}$ 個。因此

$$\mathrm{P}(\text{沒有兩人相鄰}) = \frac{\binom{n-r+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n-r+1)!\,(n-r)!}{(n-2r+1)!\,n!}.$$

（直接數學生的排序也得出同樣的結果：N 的排序有 $(n-r)!$ 種，然後把 r 個互不相同的 H 放進不同的空隙，有 $(n-r+1)(n-r)\cdots(n-2r+2) = \frac{(n-r+1)!}{(n-2r+1)!}$ 種方法，再全部除以 $n!$。）

? **想一想** 在甚麼情況下，不可能把所有曲棍球員都分隔開？

我們需要 r 個不同的空隙，而空隙只有 $n-r+1$ 個。所以：

- 若 $r \le n-r+1$，即 $n \ge 2r-1$，概率就是上面那個非零的值；
- 若 $r > n-r+1$，即 $n \le 2r-2$（非曲棍球員太少，不足以把他們隔開），概率為 0。

在臨界情況 $n = 2r-1$，排列必然是 $HNHN\cdots NH$ 的模式，而公式給出 $\frac{r!\,(r-1)!}{(2r-1)!} = 1\big/\binom{2r-1}{r}$，即 H 恰好落在那 r 個相間位置的機會。

驗算

- 取 $n = 10$，$r = 3$。則 (i) 給出 $\frac{6}{90} = \frac{1}{15}$；(ii) 給出 $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$；(iii) 給出 $\binom{8}{3}/\binom{10}{3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$。三者都與電腦枚舉 120 個可能位置集合所得的結果吻合，而且各公式已用這個方法對所有 $2 \le r \le n \le 14$ 驗證過（當 $n \le 7$ 時，更與全部 $n!$ 種排序對照過）。
- 當 $r = 2$ 時，第 (ii) 和第 (iii) 部分是互補事件（complementary events）（兩名球員要麼相鄰，要麼不相鄰），而的確有 $\frac{2}{n} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} = \frac{2}{n} + \frac{n-2}{n} = 1$。

常見錯誤

- 只數出 $n - r - 1$ 個空隙（即嚴格位於非曲棍球員之間的那些），而忘記了隊列的兩端。
- 混用模型：分子數的是 H 的位置，分母卻用學生的全部排序（$n!$）。選定一種觀點，然後貫徹到底。
- 把答案非零的條件寫成 $n \ge 2r$；其實 $n = 2r - 1$ 的情況（交替排列，首尾都是 H）同樣可行。

STEP 之外

空隙論證就是「隔板法」的想法，是計數組合學（enumerative combinatorics）中的常用工具；同一個數目 $\binom{n-r+1}{r}$ 也回答了「$\{1, \ldots, n\}$ 有多少個 r 元子集不含兩個連續整數」這個問題，而把它對 r 求和就得到斐波那契數（Fibonacci numbers）。把人的排序換成位置的集合這一步，讓人初嘗利用對稱性來縮小樣本空間（sample space）的滋味，這種手法在大學概率論中經常用到。Blitzstein 與 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率論入門）中，關於計數和概率的樸素定義（naive definition of probability）的章節寫得十分出色。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。