詳細解答

STEP I 1995，第 11 題

力學 • 圓柱之間的摩擦力

> **STEP I 1995，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q11

關鍵思路

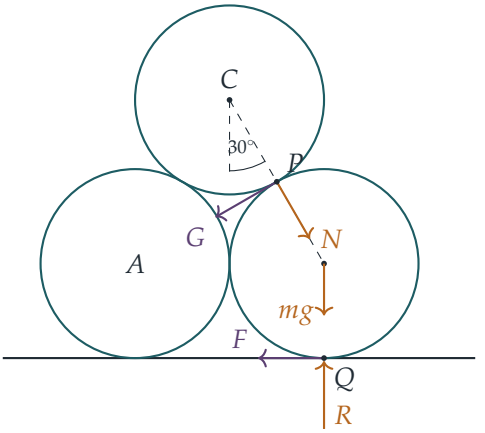
先看底下其中一個圓柱。它的重量和來自頂部圓柱的法向反作用力（normal reaction）都通過它的中心，所以對中心取力矩（moments）時只涉及兩個摩擦力（friction），而這兩個摩擦力的大小必定相等。接着只要沿水平方向分解（resolve）一次，就能定出圓柱之間接觸點上摩擦力與法向反作用力之比，餘下的工作就交給三個互相接觸的圓的幾何（30° 和 60° 的角）來完成。

解答

模型

我們把這些圓柱視為半徑為 r 的均勻剛體（rigid body）圓柱，並在垂直於各軸的橫截面上考慮問題，因此每個圓柱都是一個圓，其重量作用於圓心。每個接觸點的摩擦系數（coefficient of friction）同為 μ。把底下的兩個圓柱稱為 A（左）和 B（右），頂部的一個稱為 C。A 和 B 的中心相距 $2r$，高度同為 r；C 的中心與兩者各相距 $2r$，所以三個中心所成的三角形是等邊三角形，而由 C 的中心至 B 的中心的直線與鉛垂線成 30° 角。

我們暫且假設 A 和 B 之間互不施力；這一點留待最後再作討論。根據對稱性（symmetry），只需考慮 B 以及 C 右邊的接觸點。



作用於 B 的力有：

- 作用於其中心的重量 mg；
- 在與地面的接觸點 Q：向上的法向反作用力 R，以及沿水平方向指向 A 的摩擦力 F；
- 在與 C 的接觸點 P：沿連心線的法向反作用力 N（向下向外，與鉛垂線成 30° 角），以及沿公切線（common tangent）的摩擦力 G，我們設它的方向為向下並指向 A，即在水平線以下 30°。

假如其中一個摩擦力實際上是朝相反方向作用，算出來的值自然會是負數。

對 B 的中心取力矩

重量通過 B 的中心，N 亦然，因為兩圓之間的法向反作用力沿它們的連心線作用。兩個摩擦力都沿切線作用，與中心的垂直距離為 r。F 位於底部並指向 A，在圖中使 B 順時針轉動；G 位於 P 並沿切線向下指向 A，使它逆時針轉動。因此

$$Fr = Gr, \qquad \text{所以} \qquad F = G.$$

對 B 沿水平方向分解

N 有一個向外的水平分量 $N\sin 30^\circ = \frac{1}{2}N$。$F$ 以及 G 的水平分量 $G\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}G$ 都指向內。所以

$$\tfrac{1}{2}N = F + \tfrac{\sqrt{3}}{2}G = G\left(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

由此得

$$\frac{G}{N} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}.$$

這是正數，所以 G 確實沿我們所設的方向作用，$F = G$ 亦然。

要令 P 處的接觸點不發生滑動，我們需要 $G \le \mu N$，即

$$\mu \ge 2 - \sqrt{3}.$$

與地面的接觸點

我們還須檢查與地面的接觸點不會要求更大的摩擦力。對 C 而言，來自 B 的力有：N，方向為向上偏左，與鉛垂線成 30° 角；以及 G，沿切線向上，與水平線成 30° 角。它們的鉛垂分量分別為 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$ 和 $\frac{1}{2}G$，而根據對稱性，A 的貢獻亦相同。對 C 沿鉛垂方向分解，

$$2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}N + \tfrac{1}{2}G\right) = mg \implies N\left(\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}\right) = mg \implies N = \tfrac{1}{2}mg.$$

對整個系統沿鉛垂方向分解，系統的重量為 $3mg$，根據對稱性由兩邊平均承擔，故 $R = \frac{3}{2}mg$。於是

$$\frac{F}{R} = \frac{(2-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}mg}{\frac{3}{2}mg} = \frac{2-\sqrt{3}}{3} < 2 - \sqrt{3},$$

所以只要 $\mu \ge 2 - \sqrt{3}$，與地面的接觸點同樣不會滑動。圓柱之間的接觸點才是關鍵所在。

> **想一想** A 和 B 互相接觸。為甚麼我們可以忽略它們之間的任何力？

它們只能把對方推開，所以假設 A 以大小為 $S \ge 0$ 的力沿連心線把 B 向外推。這個力通過 B 的中心，所以力矩方程仍然給出 $F = G$，但水平方向的分解變成 $\frac{1}{2}N + S = G\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$。與此同時，$C$ 的鉛垂方向方程仍然成立，把兩者聯立求解，可知 G/N 隨 S 增加而增加（當 $S = 0$ 時其值為 $2 - \sqrt{3}$）。這個問題是靜不定（statically indeterminate）的，因為 S 不能由這些方程確定，而當 $S = 0$ 時所需的摩擦力最小。所以摩擦系數的最小可能值是 $2 - \sqrt{3}$，正如題目所求。

驗算

- $2 - \sqrt{3} = \tan 15° \approx 0.268$。所以在圓柱之間的接觸點，總反作用力與法線恰好成 15° 角，正是幾何中 30° 角的一半。這是個令人欣喜的跡象，顯示代數運算無誤。
- 地面的比值 $(2 - \sqrt{3})/3 \approx 0.089$ 是圓柱之間比值的三分之一，這很合理：地面承受 $\frac{3}{2}mg$，是 N 的三倍，但摩擦力的大小相同。
- 作數值驗算，把數值代入 B 和 C 的所有力方程和力矩方程，並對未知的推力 $S \ge 0$ 求最小值，得出最小的 μ 為 0.267949…，與 $2 - \sqrt{3}$ 吻合。

常見錯誤

- 對地面接觸點或對 P 取力矩，而不是對中心取力矩。這樣做也行得通，但會引入 N，令代數運算較為繁複；對中心取力矩則可同時消去 mg 和 N。
- 只檢查地面。地面接觸點所需的摩擦力小得多，所以會得出錯誤的臨界值。
- 對 C 沿鉛垂方向分解時，忘記了根據牛頓第三定律（Newton's third law），作用於 C 的摩擦力是沿切線向上的。

STEP 之外

底下兩個圓柱之間的力 S 無法由平衡方程求出：這個結構是靜不定的，而題目很合理地要求在 S 的所有可能取值之中求最小的摩擦。在工程學上，這類系統要靠建立彈性形變的模型來解決，而同樣的問題亦見於顆粒物料的力學，例如疊起的喉管或沙堆。若想細讀有關靜力學、摩擦和剛體平衡的嚴謹論述，可參閱 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。