詳細解答

# STEP I 1995，第 10 題

力學 • 彈性繩與反彈

**STEP I 1995，第 10 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/95-s1-q10

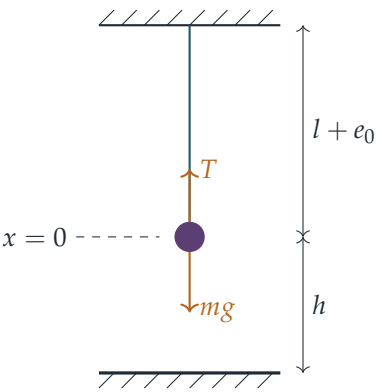
## 關鍵思路

若從平衡位置(equilibrium position)量起，重量與張力(tension)中屬於平衡狀態的那一部分恰好互相抵消，因此唯一未被平衡的力，就是與位移 $x$ 成正比的胡克定律（Hooke's law）回復力（restoring force）。由此可知運動是簡諧運動（simple harmonic motion），而它的能量方程正是題目所求的速率公式。其後的一切只是逐項記帳：能量方程負責把球在 $x = 0$ 與表面之間的運動聯繫起來，而牛頓實驗定律（Newton's experimental law）則在每次反彈時把速度反向並按比例縮小。

## 解答

我們把球當作質點（particle），把繩當作輕而有彈性的繩，並假設它在拉長時服從胡克定律。我們忽略空氣阻力，並假設反彈在瞬間完成。全題記

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{lm}.$$



### 平衡時的長度

設平衡時的伸長量（extension）為 $e_0$，則張力為 $T_0 = \lambda e_0/l$。球處於平衡時，沿鉛垂方向分解力，得 $T_0 = mg$，所以

$$\frac{\lambda e_0}{l} = mg \quad \Longrightarrow \quad e_0 = \frac{mgl}{\lambda},$$

而總長度為 $l + e_0 = l(1 + mg/\lambda)$，正如題目所求。

### 速率公式

設 $x$ 為球在平衡位置以下的距離，並取向下為正。當 $x \geq 0$ 時，伸長量為 $e_0 + x > 0$，所以繩是拉緊的，張力為 $\lambda(e_0 + x)/l$。沿向下方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda(e_0 + x)}{l} = -\frac{\lambda x}{l},$$

因為 $\lambda e_0/l = mg$。所以 $\ddot{x} = -\omega^2 x$：這是以 $x = 0$ 為中心的簡諧運動。

寫成 $\ddot{x} = v\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 並積分，

$$\int v\,\mathrm{d}v = -\omega^2 \int x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad v^2 = -\omega^2 x^2 + C.$$

在 $x = 0$ 時速率為 $u_0$，所以 $C = u_0^2$，而

$$v^2 + \frac{\lambda}{lm}x^2 = u_0^2,$$

正如題目所求。（這等價於能量守恆（conservation of energy）：重力勢能與彈性勢能合起來就是 $\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{l}x^2$ 加一個常數。）

### 第一次反彈

球能到達表面，當且僅當在 $x = h$ 時 $v^2 > 0$，即 $u_0^2 - \omega^2 h^2 > 0$。這正是題目給出的條件 $\lambda h^2 < lmu_0^2$。所以球以速率 $w_0$ 撞擊表面，其中

$$w_0^2 = u_0^2 - \omega^2 h^2.$$

根據牛頓實驗定律，球離開表面時向上運動，速率為 $ew_0$。

球由 $x = h$ 上升到 $x = 0$ 的過程中，繩仍然處於拉長狀態，所以同一條運動方程依然成立，而能量積分為 $v^2 + \omega^2 x^2 = $ 常數。唯一不同的是這個常數的值。在 $x = h$ 時 $v^2 = e^2 w_0^2$，所以常數為 $e^2 w_0^2 + \omega^2 h^2$，而在 $x = 0$ 時

$$\begin{aligned} u_1^2 &= e^2 w_0^2 + \omega^2 h^2 \\ &= e^2\left(u_0^2 - \omega^2 h^2\right) + \omega^2 h^2 \\ &= e^2 u_0^2 + \frac{\lambda}{lm}h^2\left(1 - e^2\right), \end{aligned}$$

正如題目所求。這裏 $u_1$ 的方向向上。

### 第二次反彈

> **想一想** 球經過 $x = 0$ 之後會升到平衡位置之上，繩可能會變鬆。球回到 $x = 0$ 時，速率還是 $u_1$ 嗎？

是的。在 $x = 0$ 之上，球在重量和繩的張力作用下運動；若繩變鬆，則只受重力作用。這兩個力都是保守力（conservative force）：繩鬆弛時，它的彈性勢能就是零。因此在 $x = 0$ 之上的整段運動中，總機械能守恆。球落回 $x = 0$ 時，勢能與離開時相同，所以速率同樣是 $u_1$，只是方向變為向下。

所以第二次下降與第一次完全一樣，只是以 $u_1$ 取代 $u_0$。我們仍須確定球能到達表面，而它確實可以，因為

$$u_1^2 - \omega^2 h^2 = e^2\left(u_0^2 - \omega^2 h^2\right) > 0.$$

把 $u_0$ 換成 $u_1$，重複第一次反彈的論證，

$$\begin{aligned} u_2^2 &= e^2 u_1^2 + \omega^2 h^2\left(1 - e^2\right) \\ &= e^2\left[e^2 u_0^2 + \omega^2 h^2(1 - e^2)\right] + \omega^2 h^2(1 - e^2) \\ &= e^4 u_0^2 + \omega^2 h^2(1 - e^2)(1 + e^2) \\ &= e^4 u_0^2 + \frac{\lambda}{lm} h^2\left(1 - e^4\right), \end{aligned}$$

全題至此完成。

## 驗算

- 若 $e = 1$，則沒有能量損失，兩條公式都給出 $u_1 = u_2 = u_0$，與預期相符。
- 若 $e = 0$，球離開表面時處於靜止，於是 $u_1^2 = \omega^2 h^2$：球由振幅（amplitude）$h$ 處從靜止開始上升，並以速率 $\omega h$ 通過中心，正如簡諧運動所預測。
- 有一個簡潔的方法看出規律：$u_n^2 - \omega^2 h^2 = e^{2n}\left(u_0^2 - \omega^2 h^2\right)$，因為每次反彈都把撞擊速率的平方乘以 $e^2$。
- 我們以數值方法逐步計算這個運動（龍格—庫塔法（Runge–Kutta），並容許繩變鬆）。例如，取 $m = 1$、$l = 1$、$\lambda = 20$、$g = 9.8$、$u_0 = 6$、$h = 0.3$ 及 $e = 0.9$，模擬結果為 $u_1 = 5.4316$ 和 $u_2 = 4.9233$，與公式吻合。在這個例子中，繩在兩次反彈之間確實會變鬆。

## 常見錯誤

- 從自然長度（natural length）而非平衡位置量度 $x$。這樣重量就不會抵消，公式中會多出一次項。
- 把恢復係數（coefficient of restitution）$e$ 用於 $x = 0$ 處的速率，而不是用於 $x = h$ 處的撞擊速率。
- 假設繩在平衡位置之上仍然保持拉緊。其實不一定，但由於能量守恆，這一點並不影響球在 $x = 0$ 處的速率。

## STEP 之外

重力在平衡點附近抵消，是一個普遍原理的最初例子：在平衡點附近作線性化（linearise），則小幅振動是簡諧運動，其 $\omega^2$ 等於「勁度」除以質量。彈跳的球是分段光滑振子（piecewise-smooth oscillator），又稱*碰撞*振子（impact oscillator）的一個例子。當表面本身也在運動時，這類系統的行為可以異常豐富（倍週期（period doubling），甚至混沌（chaos））。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）以大學一年級的程度講解振子和能量方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。