詳細解答

STEP I 1995，第 1 題

純數學 • 多項式不等式

> **STEP I 1995，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q1

關鍵思路

第 (i) 部分的三次式（cubic）可用分組法因式分解（factorise）；一旦寫成三個線性因式（linear factor）的乘積，它的正負號便可從數線上直接讀出。第 (ii) 部分其實是同一個三次式的化身：每一項的總次數（degree）都是 3，所以除以 y^3 之後，它就變成以 x/y 為變量的第 (i) 部分的三次式。同樣的因式分解於是給出三條通過原點的直線，而第 (iii) 部分就是一個正負號表，只不過這次是圍繞原點而畫，而不是沿着一條直線而畫。

解答

第 (i) 部分

把各項兩兩分組，

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - x + 4 &= x^2(x-4) - (x-4) \\ &= (x-4)(x^2-1) \\ &= (x+1)(x-1)(x-4). \end{aligned}$$

根（root）是 -1、1 和 4。每個因式都是線性的，只會在自己的根處變號，所以乘積在三個根處都會變號。當 x 是很大的正數時，三個因式全是正數，因此從右邊讀起，正負號的分佈是

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 4$	$x > 4$
正負號	$-$	$+$	$-$	$+$

把三次式等於零的各個根也包括在內，不等式（inequality）成立的充要條件是

$$-1 \le x \le 1 \quad \text{或} \quad x \ge 4.$$

第 (ii) 部分

設 $f(x,y) = x^3 - 4x^2y - xy^2 + 4y^3$。它就是第 (i) 部分的三次式，只是每一項都用 y 的冪補足至 3 次，而同樣的分組法仍然適用：

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2(x-4y) - y^2(x-4y) \\ &= (x-4y)(x-y)(x+y). \end{aligned}$$

乘積等於零，當且僅當其中一個因式等於零，所以 $f(x,y) = 0$ 在以下三條直線上成立：

$$x = 4y \text{ (即} y = \tfrac{1}{4}x), \qquad y = x, \qquad y = -x,$$

三條直線全都通過原點。

想一想 為甚麼 (ii) 的答案會與 (i) 有關？

當 $y \neq 0$ 時，設 $t = x/y$。那麼 $f(x,y) = y^3\,(t^3 - 4t^2 - t + 4)$，也就是 y^3 乘以第 (i) 部分的三次式。該三次式在 $t = -1, 1, 4$ 時等於零，即是在 $x = -y$、$x = y$ 和 $x = 4y$ 上等於零。（當 $y = 0$ 時，$f = x^3$ 只在原點等於零，而原點本來就在三條直線上。）

第 (iii) 部分

三條直線把平面分成六個在原點相接的扇形區域（sector）。由正 x 軸起逆時針量度，六條半直線所指的方向是

$$\arctan \tfrac{1}{4} \approx 14^\circ, \quad 45^\circ, \quad 135^\circ, \quad 194^\circ, \quad 225^\circ, \quad 315^\circ.$$

在一個扇形區域之內，f 沒有任何因式等於零，所以 f 在該區域內的正負號保持不變。每越過其中一條直線，恰好有一個因式變號（三條直線互不相同，而且在原點以外每次只會越過一條），所以 f 的正負號由一個扇形區域到下一個扇形區域交替變化。

要確定正負號，可取 $(1,0)$：$f(1,0) = 1 > 0$，而 $(1,0)$ 位於 315° 與 14° 之間的扇形區域內。繞一圈下去，正負號因此是

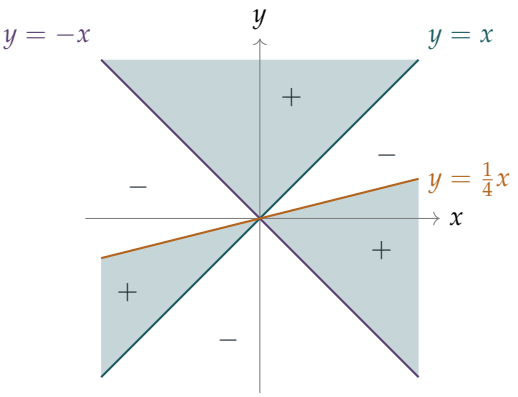
扇形區域（度）	$-45, 14$	$14, 45$	$45, 135$	$135, 194$	$194, 225$	$225, 315$
正負號：f	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

抽樣檢查一下：$f(0,1) = 4 > 0$ 屬於第三欄，$f(-3,-1) = 8 > 0$ 屬於第五欄。

所以 $f(x,y) \geq 0$ 在下圖三個有陰影的扇形區域上成立，另外還包括全部三條直線（在直線上 $f = 0$）：

- 包含正 x 軸的扇形區域，介乎 $y = -x$（下方）與 $y = \frac{1}{4}x$（上方）之間，其中 $x > 0$；
- 包含正 y 軸的扇形區域，介乎 $y = x$ 與 $y = -x$ 之間，其中 $y > 0$；

- 第三象限內介乎 $y = x$ 與 $y = \frac{1}{4}x$ 之間的狹窄扇形區域。



想一想 為甚麼把圖形繞原點旋轉半圈之後，圖形不變，只是陰影部分與空白部分對調？

f 的每一項都是奇數次 3 次，所以 $f(-x,-y) = -f(x,y)$。把一點繞原點旋轉 180°，會令 f 的正負號反轉，所以每個有陰影的扇形區域的對面都是一個沒有陰影的扇形區域。這是檢查任何草圖的快捷方法：有陰影和沒有陰影的扇形區域必須成對地相對，而圖中確實如此。

驗算

- 在直線 $y = 1$ 上，$f(x,1)$ 正好是第 (i) 部分的三次式，所以 $y = 1$ 上有陰影的部分應該是 $-1 \le x \le 1$ 和 $x \ge 4$。在草圖中，$y = 1$ 在 $y = -x$ 與 $y = x$ 之間（由 $x = -1$ 到 $x = 1$）有陰影，並且在它與 $y = \frac{1}{4}x$ 相交之處，即 $x = 4$，再次進入有陰影的扇形區域。
- 在 x 軸上 $f = x^3$，它非負的充要條件是 $x \ge 0$：正 x 軸有陰影，負的一半則沒有。
- 數值上，在 2×10^5 個隨機點計算 f 的值，其正負號每次都與六個扇形區域的正負號表吻合；例如 $f(1,0) = 1$、$f(0,-1) = -4$、$f(-3,-1) = 8$。

常見錯誤

- 除以 y^3 之後，在 $y < 0$ 時仍然保留原來的不等號。由於該處 $y^3 < 0$，條件變成 $t^3 - 4t^2 - t + 4 \le 0$，這正是下半平面看起來與上半平面不同的原因。
- 只在 $y > 0$ 時用第 (i) 部分的答案來畫陰影，然後完全忘記了 $y < 0$ 的情況。
- 漏掉直線本身：不等式並非嚴格不等式，所以直線也屬於該區域。

STEP 之外

各項次數全部相同的多項式稱為齊次（homogeneous）多項式。它的零點集是若干條通過原點的直線的併集，而它的正負號只取決於方向。齊次多項式是射影幾何（projective geometry）的起點，在射影幾何中，一個點就是一整條通過原點的直線；當你在線性代數（linear algebra）課程中為圓錐曲線（conics）和二次型（quadratic forms）分類時，它們又會再次出現。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 涵蓋二次型，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則有更多這種風格的 STEP 題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。