詳細解答

STEP III 1994，第 9 題

力學 • 等時曲線與碰撞

> **STEP III 1994，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q9

本題在 *Beyond STEP* 第 11.4 節等時曲線中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/tautochrone.html

關鍵思路

沿曲面的能量守恆（energy conservation）給出一個首次積分（first integral），而碗的形狀 $y = s^2/(4k)$ 把它化為以弧長（arc-length）s 表示的簡諧運動（simple harmonic motion）能量方程。簡諧運動的週期與振幅無關，所以每個由靜止釋放的質點，無論從哪裏出發，都在相同的時間後到達 V。正因如此，最後一部分的兩個質點必定在 V 相遇，而且一次又一次地相遇。

解答

常數

我們把質點看作光滑曲面上的一個質點模型（point mass）。作用在它身上的力有兩個：重量和法向反作用力（normal reaction）。質點由靜止出發，所以它的速度一開始並沒有垂直於「通過起點和軸的鉛垂平面」的水平分量。兩個力都沒有垂直於該平面的分量（軸對稱曲面的反作用力位於通過軸的平面之內），所以質點一直留在這個鉛垂截面內。它沿曲線 $s = 2\sqrt{ky}$ 運動，速率為 $|\mathrm{d}s/\mathrm{d}t|$。

曲面是光滑的，所以法向反作用力與速度垂直，不作功。只有重力作功，因此機械能守恆：

$$\tfrac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgy = \text{常數}.$$

乘以 $2/m$ 可見 $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2gy$ 是常數，正如所求。質點在高度 h 由靜止釋放，故該常數為 $2gh$。

到達 V 所需的時間

在曲線上，$y = s^2/(4k)$。代入後得

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{g}{2k}\,s^2 = 2gh.$$

對 t 求導，再除以 $2\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$（質點在運動時此步成立），得

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{2k}\,s,$$

這是關於 s 的簡諧運動，其中 $\omega^2 = \dfrac{g}{2k}$，中心在 $s = 0$，即點 V。

想一想 為甚麼由釋放到抵達 V 的時間是四分之一個週期？

質點由靜止從端點位置 $s_0 = 2\sqrt{kh}$ 出發，所以 $s = s_0 \cos \omega t$。當 $\omega t = \frac{\pi}{2}$ 時它首次到達 $s = 0$，這是週期 $2\pi/\omega$ 的四分之一。所以到達 V 所需的時間是

$$T = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2k}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k}{2g}},$$

正如所求。這個結果與 h 無關：這個碗是一條等時曲線（tautochrone）。

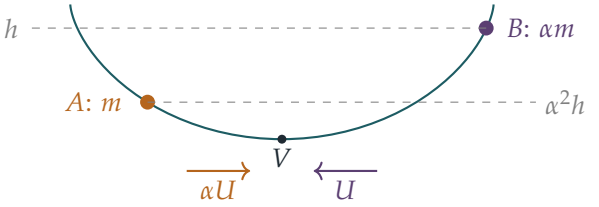
為方便稍後使用，質點在 V 的速率是 ωs_0；或者直接在能量方程中取 $y = 0$，得 $\sqrt{2gh}$。

兩個質點

把兩個質點看作在 V 正面碰撞的質點。該處的切線是水平的，所以碰撞沿一條水平線發生。把質量為 m 的質點稱為質點 A（在高度 $\alpha^2 h$ 釋放），把質量為 αm 的質點稱為質點 B（在另一側的高度 h 釋放）。

它們在 V 相遇。根據上一部分，每個質點不論起始高度如何，都在時間 T 後到達 V。它們同時釋放，所以同時到達 V，並在時間 T 於該處碰撞。

碰撞前一刻的速率。記 $U = \sqrt{2gh}$。由能量方程，A 到達時的速率是 $\sqrt{2g\alpha^2 h} = \alpha U$，$B$ 到達時的速率是 U，兩者運動方向相反。取 A 的運動方向為正。



碰撞前的動量是

$$m(\alpha U) + \alpha m(-U) = 0.$$

這就是題目如此選取質量和高度的原因。

第一次碰撞之後。設碰撞後的速度為 v_A 和 v_B。由動量守恆（conservation of momentum）和牛頓實驗定律（Newton's experimental law）得

$$mv_A + \alpha m\, v_B = 0, \qquad v_B - v_A = \alpha\big(\alpha U - (-U)\big) = \alpha(1+\alpha)U.$$

由第一條方程得 $v_B = -v_A/\alpha$。代入第二條方程得 $-v_A(1+\alpha)/\alpha = \alpha(1+\alpha)U$，所以

$$v_A = -\alpha^2 U, \qquad v_B = \alpha U.$$

兩個速度都反向，並乘以 α。（總動量為零時，相對速度和每個質點各自的速度全都乘以 $-\alpha$。）所以每個質點都沿碗中自己那一側往回上升。由能量守恆，A 升至高度 $\alpha^4 h$，B 升至高度 $\alpha^2 h$。

規律重複出現。兩個質點在同一時刻，即碰撞後時間 T，各自在新的最高點靜止下來。然後各自再用時間 T 返回 V。所以它們在時間 $3T$ 再次於 V 碰撞，此時 A 來自高度 $\alpha^4 h$，B 來自高度 $\alpha^2 h$。這正是把 h 換成 $\alpha^2 h$ 之後的初始狀況。總動量再次為零，兩個速度也再次反向並乘以 α。

由歸納法（induction），第 n 次碰撞在時間 $(2n-1)T$ 於 V 發生，而在這次碰撞之後

$$A \text{ 升至高度} \alpha^{2n+2}h, \qquad B \text{ 升至高度} \alpha^{2n}h,$$

各自留在碗中它出發的那一側。兩個質點在各自的一側振盪，並在等間隔的時刻 $T, 3T, 5T, \ldots$ 於 V 碰撞。每次碰撞時速率都按因子 α 減小，所以高度按因子 α^2 減小，動能損失的比例為 $1-\alpha^2$。碰撞永不停止，因為相鄰兩次碰撞的間隔總是 $2T$。振幅按等比方式遞減，當 $t \to \infty$ 時兩個質點都趨向靜止於 V，但不會在有限時間內真正靜止在那裏。

驗算

- 量綱（dimensions）：k 是長度（因為 $s^2 = 4ky$），所以 $\sqrt{k/g}$ 是時間。
- 數值方面，我們對隨機選取的 k 和 h 以數值求積法(quadrature)計算了 $\int_0^{s_0} \mathrm{d}s/\sqrt{2g(h-y)}$。取 $k=1$、$g=9.81$ 時，結果是 $0.7092\ldots = \pi\sqrt{1/19.62}$，與 h 無關。
- 我們以數值方法逐步計算兩個質點的運動（取 $\alpha = 0.6$ 和 $\alpha = 0.3$），並在每次相遇時應用碰撞定律。碰撞發生在 $t/T = 1, 3, 5, 7$，每次都在 V，而且總動量為零。取 $\alpha = 0.6$ 時，第一次碰撞後的高度是 $0.1296h = \alpha^4 h$ 和 $0.36h = \alpha^2 h$。
- 極限情況 $\alpha \to 1$：質量相等、高度相等，而且是完全彈性碰撞（perfectly elastic），所以每個質點都永遠反彈回到起始高度，與預期相符。

常見錯誤

- 以為 V 距離起點半個週期：質點從振盪的端點出發，所以到 V 只需四分之一個週期。
- 在牛頓定律中忘記方向反轉：要使用帶正負號的速度，而不只是速率。
- 聲稱質點在有限次碰撞後靜止下來。碰撞之間的時間間隔是固定的，並不會縮短（這與球在地板上彈跳不同），所以有無限多次碰撞，分佈在無限長的時間之內。

STEP 之外

內稟方程（intrinsic equation）$s^2 = 4ky$ 描述的是一條擺線（cycloid）。這道題重新發現了惠更斯（Huygens）的等時曲線：在倒置的擺線上，滑到最低點所需的時間與起點無關。惠更斯利用這一點設計出週期與擺幅無關的擺鐘。同一條曲線也是最速降線（brachistochrone），即下降最快的曲線，它可用變分法（calculus of variations）求得，而變分法是大學二年級力學的標準課題。想進一步了解振盪和碰撞，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。