詳細解答

STEP III 1994，第 7 題

純數學 • 群同構

> **STEP III 1994，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q7

關鍵思路

兩個羣（group）要同構（isomorphic），就必須共有同構映射（isomorphism）所保持的每一項結構性質。其中最有用的兩項，是各元素的階（order）的清單，以及該羣是否可交換（commutative，即阿貝爾羣，abelian）。只要列出各元素的階，已足以把 S_3 和 Z_6 區分開來。要證明兩個羣確實同構，我們就寫出一個明確的雙射（bijection），並驗證它與運算相容。最後一部分歸結為交換性：凡是由複數組成的羣都是阿貝爾羣，而 S_3 不是。

解答

S_3 和 Z_6 的元素

把三件物件標記為 $1,2,3$，並採用循環記法（cycle notation），由右至左複合，即 $\sigma\tau$ 表示「先做 τ，再做 σ」。六個置換（permutation）列於下表。

S_3 的元素	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
階	1	2	2	2	3	3

對換（transposition）把兩件物件互換，做兩次便一切還原，所以它的階是 2。像 (123) 這樣的 3-循環把 $1 \to 2 \to 3 \to 1$，要施行三次才能使每件物件回到原位，所以它的階是 3。

在 $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ 中，單位元（identity）是 0，而 a 的階是滿足 $na \equiv 0 \pmod 6$ 的最小 $n \geq 1$，即 $6/\gcd(a,6)$。

Z_6 的元素	0	1	2	3	4	5
階	1	6	3	2	3	6

例如，$4+4=8\equiv 2$ 而 $4+4+4=12\equiv 0$，所以 4 的階是 3。

S_3 和 Z_6 同構嗎？

不同構。同構映射 θ 保持元素的階：若 g 的階是 n，則 $\theta(g)^k=\theta(g^k)$，而由於 θ 是單射（injective），這個元素是單位元當且僅當 g^k 是單位元。因此，同構的羣中，每一種階的元素數目都相同。但 Z_6 有兩個階為 6 的元素，S_3 卻一個也沒有，所以兩者並不同構。（兩者在階為 2 的元素上也有分別：S_3 有三個，Z_6 只有一個。）

還有第二個理由，我們在最後會再用到。Z_6 是阿貝爾羣，因為加法可交換。S_3 則不是：

$$(12)(13)=(132),\qquad (13)(12)=(123).$$

就第一個乘積而言，(13) 把 $1\to 3$，然後 (12) 保持 3 不變，所以 $1\to 3$。同理 $3\to 2$ 及 $2\to 1$。同構映射把可交換的一對元素映到可交換的一對元素，所以非阿貝爾羣不可能與阿貝爾羣同構。

C_6 與 Z_6 同構

定義 $\phi: Z_6\to C_6$ 為 $\phi(k)=\alpha^k$，其中 $k=0,1,\dots,5$。

- 雙射。當 $k=0,\dots,5$ 時，各數 $\alpha^k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/3}$ 的輻角（argument）為 $0,\frac{\pi}{3},\dots,\frac{5\pi}{3}$。這些是 $[0,2\pi)$ 內互不相同的角，所以這六個值是單位圓上互不相同的點。因此 ϕ 是單射，從而是兩個大小同為 6 的集合之間的雙射。
- 運算。設 $a,b\in Z_6$，並寫 $a+b=6q+r$，其中 $r=(a+b)\bmod 6$。由於 $\alpha^6=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}=1$，

$$\phi(a)\,\phi(b)=\alpha^a\alpha^b=\alpha^{a+b}=(\alpha^6)^q\alpha^r=\alpha^r=\phi\big((a+b)\bmod 6\big).$$

所以 ϕ 把模 6 加法變成複數乘法，它是一個同構映射。因此 $C_6\cong Z_6$。作為核對，α 和 α^5（即 1 和 5 的像）的階是 6，α^2 和 α^4 的階是 3，而 $\alpha^3=-1$ 的階是 2，與 Z_6 的表吻合。

$\mathbb{C}$ 有與 S_3 同構的子羣嗎？

> **想一想** 所有由複數組成的羣都共有甚麼性質？

它們全都是阿貝爾羣。$(\mathbb{C},+)$ 的子羣（subgroup）H 是阿貝爾羣，因為對所有複數 z,w 都有 $z+w=w+z$。非零複數在乘法下所成的羣的子羣 H 是阿貝爾羣，因為 $zw=wz$。子羣沿用大羣的同一運算，所以繼承了交換性。

現在假設某個這樣的 H 有同構映射 $\theta : S_3 \to H$。把它應用於上面那對不可交換的元素。由於 H 是阿貝爾羣，

$$\theta\big((12)(13)\big) = \theta(12)\,\theta(13) = \theta(13)\,\theta(12) = \theta\big((13)(12)\big),$$

這裏以乘法形式書寫（若是加法的情況，把乘積換成和即可）。因為 θ 是單射，由此會得出 $(12)(13) = (13)(12)$，而這是錯的。所以複數的子羣，不論是加法的還是乘法的，都**沒有**一個與 S_3 同構。

驗算

- 在每個羣中，元素的階都整除 6（拉格朗日定理，Lagrange's theorem）：S_3 中是 $1, 2, 3$，Z_6 中是 $1, 2, 3, 6$。
- 我們用電腦重新計算了 S_3、Z_6 和 C_6 中每個元素的階，確認了 $(12)(13) \neq (13)(12)$，並對全部 36 對 (a, b) 以數值方法檢驗了 $\alpha^{(a+b) \bmod 6} = \alpha^a \alpha^b$，誤差在 10^{-12} 以內。

常見錯誤

- 說「兩者都有六個元素，所以同構」。大小相同是必要條件，但遠遠不是充分條件。
- 說 S_3 中階為 3 的元素是 (12) 和 (13)。對換的階是 2；只有 3-循環的階才是 3。
- 在最後一部分，只排除了有限的乘法子羣（單位根，roots of unity）。交換性的論證一次過涵蓋所有子羣，不論有限還是無限、加法還是乘法。

STEP 之外

這道題講的是不變量（invariant）：同構的羣必須共有的性質，例如元素的階和交換性。事實上，每個階為 6 的羣都與 Z_6 或 S_3 其中之一同構。更一般地，非零複數在乘法下所成的羣的任何有限子羣都是循環羣（cyclic group），所以它是一個由單位根組成的羣。這兩個結果，你在第一門羣論課程的初段就會遇到。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）寫得平易近人，很適合用來閱讀這些內容。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。