詳細解答

STEP III 1994，第 6 題

純數學 • 阿根圖上的旋轉

> **STEP III 1994，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q6

關鍵思路

以點 p 為中心、轉角為 θ 的旋轉（rotation）就是映射 $z \mapsto p + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-p)$：先把 p 移到原點，旋轉，再移回去。把若干個這樣的映射複合（compose）起來，結果必定形如 $z \mapsto \lambda z + \mu$，而「$P_{\text{最後}} = P_1$ 對每一個 P_1 都成立」就表示這個映射是恆等映射（identity），所以 $\lambda = 1$ 且 $\mu = 0$。餘下的工作，就是從幾何角度解讀這兩條等式。

解答

求 z_5

正方向的四分之一圈旋轉相當於乘以 i，所以把 P_1 繞 A 旋轉便得

$$z_2 = a + \mathrm{i}(z_1 - a) = (1-\mathrm{i})a + \mathrm{i}z_1.$$

同理，$z_3 = (1-\mathrm{i})b + \mathrm{i}z_2$，$z_4 = (1-\mathrm{i})c + \mathrm{i}z_3$，以及 $z_5 = (1-\mathrm{i})d + \mathrm{i}z_4$。逐步代回去，

$$\begin{aligned} z_5 &= (1-\mathrm{i})(d + \mathrm{i}c + \mathrm{i}^2 b + \mathrm{i}^3 a) + \mathrm{i}^4 z_1 \\ &= (1-\mathrm{i})(d - b + \mathrm{i}(c-a)) + z_1. \end{aligned}$$

P_5 何時回到 P_1？

四個四分之一圈合起來是一整圈，所以 z_1 的係數恰好是 1，而

$$z_5 - z_1 = (1-\mathrm{i})(d - b + \mathrm{i}(c-a)),$$

這完全與 z_1 無關。複合映射是一個純粹的平移（translation）。由於 $1 - \mathrm{i} \neq 0$，

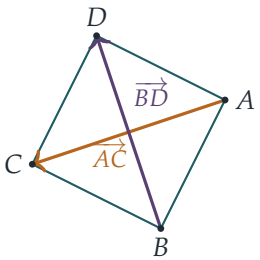
$$\begin{aligned} z_5 = z_1 \text{ 對所有} z_1 &\iff d - b + \mathrm{i}(c - a) = 0 \\ &\iff \mathrm{i}(c - a) = b - d \\ &\iff a - c = \mathrm{i}(b - d), \end{aligned}$$

其中最後一步是把兩邊同乘以 $-\mathrm{i}$（而 $-\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = 1$）。每一步都可逆，所以這就是所要求的「若且僅若」（if and only if）。（如果條件不成立，平移量便不是零，於是無論怎樣選取 P_1，都有 $P_5 \neq P_1$。）

想一想 $a - c = \mathrm{i}(b - d)$ 說明了圖形 $ABCD$ 有甚麼特點？

乘以 -1：條件變成 $c - a = \mathrm{i}(d - b)$。這裏 $c - a$ 代表向量 $\overrightarrow{AC}$，而 $d - b$ 代表向量 $\overrightarrow{BD}$。乘以 i 會把向量旋轉 $\pi/2$ 而不改變其長度。所以：

$\overrightarrow{AC}$ 是 $\overrightarrow{BD}$ 沿正方向轉過一個直角所得；也就是說，四邊形 $ABCD$ 的對角線（diagonal）AC 與 BD 長度相等且互相垂直，而 AC 是由 BD 逆時針轉四分之一圈而得。



在圖中的例子裏，$\overrightarrow{BD} = -1 + 3\mathrm{i}$，而 $\overrightarrow{AC} = -3 - \mathrm{i} = \mathrm{i}(-1 + 3\mathrm{i})$。定向（orientation）是有關係的：頂點按順時針次序標記的正方形滿足這個條件，但按逆時針次序標記的則不滿足（那時 $\overrightarrow{AC} = -\mathrm{i}\,\overrightarrow{BD}$）。

三次轉角為 θ 的旋轉

設 $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$。與之前完全一樣，每一步都是 $z \mapsto (1 - w)p + wz$，所以

$$\begin{aligned} z_4 &= (1 - w)c + w\big((1 - w)b + w\big((1 - w)a + wz_1\big)\big) \\ &= (1 - w)\big(c + wb + w^2a\big) + w^3z_1. \end{aligned}$$

這就是 $\lambda z_1 + \mu$，其中 $\lambda = w^3$，$\mu = (1 - w)(c + wb + w^2a)$。它對所有 z_1 都等於 z_1，若且僅若 $\lambda = 1$ 且 $\mu = 0$（取 $z_1 = 0$ 得 $\mu = 0$，再取 $z_1 = 1$ 得 $\lambda = 1$）。

轉角。$w^3 = 1$ 表示 3θ 是 2π 的倍數。我們把 $\theta \neq 0$ 理解為「不是整數圈」，所以 $w \neq 1$；因此 w 是一個非實數的三次單位根（cube root of unity），而

$$\theta = \pm\tfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

各點。由於 $w \neq 1$，$\mu = 0$ 變成 $c + wb + w^2 a = 0$。乘以 w 並利用 $w^3 = 1$，得 $a + w^2 b + wc = 0$；又因為 $1 + w + w^2 = 0$（因 $w^3 = 1$，$w \neq 1$），我們可以改寫 $a = -(w + w^2)a$，所以

$$w(c-a) + w^2(b-a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c - a = -w\,(b-a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}(b-a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi)}(b-a).$$

? **想一想** 當 $\theta = \pm 2\pi/3$ 時，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi)}$ 是甚麼？

當 $\theta = 2\pi/3$ 時，它是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$；當 $\theta = -2\pi/3$ 時，它是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$（因為 $\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$）。所以 $\overrightarrow{AC}$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 轉過 $\mp\pi/3$ 所得，長度不變：ABC 是**等邊**（equilateral）三角形，當 $\theta = 2\pi/3$ 時 A, B, C 按**順時針**次序排列，當 $\theta = -2\pi/3$ 時則按**逆時針**次序排列。反過來，以上每一步都可逆，所以這些條件也能推出 $\mu = 0$。

由於 A, B, C 位於單位圓上，這個圓就是三角形的外接圓（circumcircle），而等邊三角形的外心（circumcentre）就是它的中心，所以三個頂點平均分佈在 $|z| = 1$ 上。兩種情況可以簡潔地合併成一句：

$$\theta = \pm\tfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}, \qquad b = a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \quad c = b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

用文字來說，三次旋轉各轉三分之一圈，而 A, B, C 平均分佈在單位圓上，其排列方向與旋轉方向相反。

驗算

- 用電腦隨機選取 A, B, C, D，再對隨機選取的點施行四次四分之一圈旋轉，結果與 z_5 的公式吻合，誤差在 10^{-9} 之內；取 $c = a - \mathrm{i}(b-d)$ 時，每個 P_1 都回到原位，而把 c 稍微移動 0.1 之後便不再成立。
- 在單位圓上隨機選取 a，並取 $\theta = \pm 2\pi/3$，則 $b = a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$、$c = b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ 對隨機的 z_1 都給出 $z_4 = z_1$；把標記次序倒轉或改用其他 θ 則不成立。
- 手算：把 $z_1 = 0$ 依次繞順時針標記的單位正方形 $a = 0$、$b = \mathrm{i}$、$c = 1 + \mathrm{i}$、$d = 1$ 旋轉。你會得到 $0 \to 0 \to 1 + \mathrm{i} \to 1 + \mathrm{i} \to 0$。回到原位了。

常見錯誤

- 把繞 A 的旋轉寫成 $z \mapsto \mathrm{i}z$，忘記了要先把 A 移到原點。
- 忽略定向：對角線之間的旋轉方向，以及 $\theta = \pm 2\pi/3$ 兩種情況下三角形各自的排列方向，都是條件的一部分。

STEP 之外

滿足 $|\lambda| = 1$ 的映射 $z \mapsto \lambda z + \mu$ 就是平面上保持定向的等距變換（isometry），它們構成一個羣（group）。轉角可以相加，所以若干個旋轉的複合是一個轉角為各角總和的旋轉；若總和是整數圈，則是一個平移：這就是 $z_5 - z_1$ 結果是常數的原因。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把複數的這種幾何觀點闡述得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。