詳細解答

STEP III 1994，第 5 題

純數學 • 麥克勞林級數

> **STEP III 1994，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q5

關鍵思路

把 $\sin^{-1}x$ 求導一次會得到一個平方根，再求導一次，便得到 f'' 與 f' 之間一個不含平方根的關係式。然後利用萊布尼茲定理（Leibniz's theorem），就可以把這一條方程變成所有高階導數的遞推關係（recurrence）。在 $x=0$ 處，大部分的項都會消失，於是得到麥克勞林係數（Maclaurin coefficients）的一個簡單遞推關係。至於 g，利用對數定律便可把一切化為我們熟悉的 $\ln(1\pm x)$ 的級數。

解答

微分方程

對於 $-1<x<1$，

$$\mathrm{f}'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2},\qquad \mathrm{f}''(x)=-\tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x)=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

把第二式乘以 $1-x^2$，得 $(1-x^2)\mathrm{f}''(x)=x(1-x^2)^{-1/2}=x\mathrm{f}'(x)$，所以

$$(1-x^2)\mathrm{f}''(x)-x\mathrm{f}'(x)=0,$$

這正是所需的結果。

遞推關係

利用萊布尼茲定理 $(uv)^{(n)}=\sum_r \binom{n}{r}u^{(r)}v^{(n-r)}$，把這個恆等式求導 n 次。在第一個乘積中，取 $u=1-x^2$。它的各階導數依次為 $-2x$、-2，之後全為 0，所以只有三項留下

來：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)\mathrm{f}''\right] = (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} + n(-2x)\mathrm{f}^{(n+1)} + \binom{n}{2}(-2)\mathrm{f}^{(n)}.$$

在第二個乘積中 $u = x$，只有兩項留下來：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x\mathrm{f}'\right] = x\mathrm{f}^{(n+1)} + n\mathrm{f}^{(n)}.$$

兩式相減，並利用 $2\binom{n}{2} = n(n-1)$，

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} - (2n+1)x\mathrm{f}^{(n+1)} - (n(n-1)+n)\mathrm{f}^{(n)} \\ &= (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} - (2n+1)x\mathrm{f}^{(n+1)} - n^2\mathrm{f}^{(n)}, \end{aligned}$$

這就是所需的結果。它對每個 $n \geq 1$ 都成立，而當 $n = 0$ 時，它就是最初的那條方程。（如果你喜歡，也可以改用歸納法（induction）來證明：把 n 的情形求導一次，再整理各項，便得到 $n+1$ 的情形。這其實是同一個計算，只是逐步進行而已。）

f 的麥克勞林級數

？ 想一想 x 取哪個值，會令這個遞推關係容易使用？

代入 $x = 0$。中間的一項消失，而 $1 - x^2 = 1$，所以

$$\mathrm{f}^{(n+2)}(0) = n^2\,\mathrm{f}^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

我們由 $\mathrm{f}(0) = \sin^{-1} 0 = 0$ 和 $\mathrm{f}'(0) = 1$ 出發。

偶數階導數。由於 $\mathrm{f}(0) = 0$，根據遞推關係，每個偶數階導數在 0 處都等於零。這與我們的預期相符，因為 $\sin^{-1}$ 是奇函數（odd function）。

奇數階導數。取 $n = 1, 3, 5, \ldots$，

$$\mathrm{f}'''(0) = 1^2, \quad \mathrm{f}^{(5)}(0) = 3^2 \cdot 1^2, \quad \mathrm{f}^{(7)}(0) = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2,$$

而一般地

$$\mathrm{f}^{(2k+1)}(0) = \left(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\right)^2 \qquad (k \geq 1).$$

因此

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1^2}{3!}x^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!}x^5 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7!}x^7 + \cdots = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots.$$

x^{2k+1} 的係數可以化簡得很整齊。寫出 $(2k+1)! = (1 \cdot 3 \cdots (2k-1))(2 \cdot 4 \cdots 2k)(2k+1)$，再約去一個奇數乘積：

$$a_{2k+1} = \frac{\left(1 \cdot 3 \cdots (2k-1)\right)^2}{(2k+1)!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \cdot \frac{1}{2k+1}.$$

由比值審斂法（ratio test）可知，這個級數在 $|x| < 1$ 時收斂，因為 $a_{2k+3}/a_{2k+1} \to 1$。至於它在該範圍內確實等於 $\sin^{-1} x$，則可以把 $(1-x^2)^{-1/2}$ 的二項級數（binomial series）逐項積分來確認，所得的係數完全相同。

函數 g

根據對數定律，$\mathrm{g}(x) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$。對於 $|x| < 1$，

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \qquad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

兩者相減時，偶數次冪互相抵消，奇數次冪則變成兩倍。所以

$$\mathrm{g}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

（你也許會認出 g 就是 $\tanh^{-1} x$。）

比較係數

> ? **想一想** 兩個係數都有因子 $\frac{1}{2k+1}$。那麼還剩下甚麼要比較？

對於 $n \geq 1$，x^{2n+1} 的係數在 g 中是 $\dfrac{1}{2n+1}$，而在 f 中是

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

。這 n 個因子 $\frac{2r-1}{2r}$ 每一個都嚴格介乎 0 與 1 之間，而且因為 $n \geq 1$，這樣的因子至少有一個。所以它們的乘積嚴格小於 1，從而

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+1}.$$

因此 g 中的係數較大，這正是所需的結果。當 $n = 0$ 時，兩個係數都等於 1，這就是題目把這個情形排除在外的原因。

驗算

- 在 $x = -\frac{1}{2}$ 處，把級數求和至 x^{59} 一項，得 -0.5235987756，與 $\sin^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\pi/6$ 吻合。
- 係數 $1, \frac{1}{6}, \frac{3}{40}, \frac{5}{112}$ 與直接由 $\mathrm{f}^{(n+2)}(0) = n^2 \mathrm{f}^{(n)}(0)$ 生成的係數一致。$\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$、$\frac{3}{40} < \frac{1}{5}$、$\frac{5}{112} < \frac{1}{7}$ 這幾個比較亦如所述成立。
- 由於 f 的每個係數都不超過 g 中對應的係數，對於 $0 < x < 1$ 應有 $\sin^{-1} x < \tanh^{-1} x$。在 $x = 0.5$ 處：$0.5236 < 0.5493$。

常見錯誤

- 使用萊布尼茲定理時漏掉 $\binom{n}{2}$ 的一項，以致最後的係數變成 n 而不是 n^2。

- 寫成 $f^{(2k+1)}(0) = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$ 而漏掉平方。遞推關係的每一步都是乘以 n^2，而不是 n。
- 計算麥克勞林係數時，只除以 $(2k)!$ 或 $(2k+1)$，而不是除以 $(2k+1)!$。

STEP 之外

比值 $\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}$ 等於 $\binom{2n}{n}/4^n$，而當 n 很大時，它的表現近似於 $1/\sqrt{\pi n}$。這是沃利斯乘積（Wallis's product）和斯特靈公式（Stirling's formula）的推論。$\sin^{-1} x$ 的級數在 $x = 1$ 處同樣收斂，其和為 $\pi/2$，但要證明這一點，需要用到阿貝爾定理（Abel's theorem），該定理處理冪級數（power series）在收斂區間（interval of convergence）端點的情況。當一個函數的各階導數滿足某條微分方程時，便可推出其係數的遞推關係；這就是常微分方程（ODE）的級數解法，Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材）對此有所講解。至於泰勒級數（Taylor series）在甚麼情況下真正等於原來的函數，嚴謹的證明可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。