詳細解答

STEP III 1994，第 4 題

純數學 • 常微分方程的奇解

> **STEP III 1994，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q4

本題在 *Beyond STEP* 第 8.1 節當解不唯一中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/non-uniqueness.html

關鍵思路

兩邊開平方：方程即 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \pm 2\sqrt{y}$，馬上可以分離變數（separation of variables）。更值得留意的是，每一條拋物線（parabola）$y = (x-c)^2$ 都滿足這個方程，所以方程的解不過是把 $y = x^2$ 沿 x 軸滑動所得的各個副本。一旦看出這幅圖像，其後各部分要問的，就是哪些副本通過哪些點，以及所有副本有甚麼共通之處。

解答

通解（general solution）

由於 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2 \geq 0$，任何解都有 $y \geq 0$。在 $y > 0$ 之處，可以寫成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 2\sqrt{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{y} = \pm(x-c)$$

其中 c 為常數，而無論取哪一個符號，平方後都得到

$$y = (x-c)^2.$$

值得直接驗證整條拋物線都是解，包括左右兩半和頂點（vertex）：$y' = 2(x-c)$，所以對每一個 x 都有 $(y')^2 = 4(x-c)^2 = 4y$。

> ? **想一想** 兩個符號得出同一條公式。那麼「±」到哪裏去了？

它藏在每條拋物線的兩半之中。在 $y=(x-c)^2$ 上，斜率（gradient）$2(x-c)$ 在頂點左方等於 $-2\sqrt{y}$，在右方等於 $+2\sqrt{y}$，所以單單一條拋物線已經用上兩個符號。到我們要令曲線通過某一點時，符號的選擇便以 c 的選擇這個形式重新出現。

通過 (a,b^2) 的解

我們需要 $(a-c)^2=b^2$，所以 $a-c=\pm b$，即 $c=a-b$ 或 $c=a+b$。兩個解是

$$y=(x-a+b)^2 \qquad 及 \qquad y=(x-a-b)^2.$$

兩者並不相同，因為 $b\neq 0$ 令 $a-b\neq a+b$。（假如 $b=0$，兩者便會合併成一條頂點在 $(a,0)$ 的拋物線；這時該點亦會位於解 $y=0$ 之上，這個解我們在最後會再遇到。）把 b 換成 $-b$ 只會把兩個解對調，這是理所當然的，因為點 (a,b^2) 並無改變。

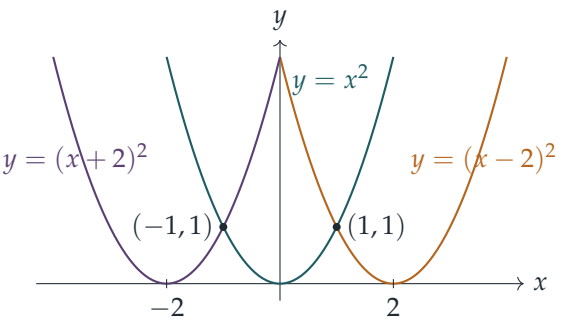
點 $(a_1,1)$ 和 $(a_2,1)$

取 $b=1$：通過 $(a,1)$ 的解是 $y=(x-a+1)^2$ 和 $y=(x-a-1)^2$。拋物線 $y=(x-c)^2$ 通過原點，當且僅當 $c=0$，所以我們需要 $a-1=0$ 或 $a+1=0$。因此

$$a_1=1, \qquad a_2=-1.$$

通過 $(1,1)$ 的解是 $y=x^2$（來自 $c=a_1-1=0$）和 $y=(x-2)^2$。通過 $(-1,1)$ 的解是 $y=(x+2)^2$ 和 $y=x^2$（來自 $c=a_2+1=0$）。

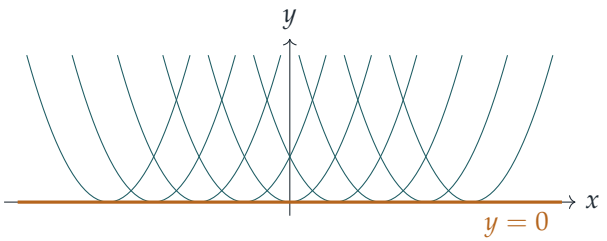
對這兩點來說，通過原點的解都是同一條曲線 $y=x^2$，所以它們的圖像重合。這並不令人意外：$(1,1)$ 和 $(-1,1)$ 正是 $y=x^2$ 上高度為 1 的兩點，分別位於頂點兩側。另外兩個解是 $y=(x-2)^2$ 和 $y=(x+2)^2$，即把 $y=x^2$ 分別向右和向左平移 2。



在 $(1,1)$，曲線 $y=x^2$ 的斜率是 $+2$，而 $y=(x-2)^2$ 的斜率是 -2：通過同一點的兩個解總是在該點相交，斜率為 $\pm 2b$，每個平方根各佔其一。

曲線族及其公切線（common tangent）

改變 a 和 b，只不過是令 $c = a \pm b$ 取遍所有實數，所以這個曲線族就是 $y = x^2$ 的所有水平平移（translate）。



每一條拋物線都在其頂點 $(c, 0)$ 與 x 軸相切，該處的斜率為 0。所以直線 $y = 0$ 是整個曲線族的公切線（它是這族曲線的包絡線（*envelope*））。

它之所以重要，是因為 $y = 0$ 本身也是一個解：這時 $y' = 0$，而 $(y')^2 = 0 = 4y$。但無論 c 取甚麼值，它都不是其中一條拋物線：它是一個奇異解（*singular solution*），分離變數時因為除以 $\sqrt{y}$ 而遺漏了它。在每一點 $(c, 0)$，解 $y = 0$ 與拋物線 $y = (x - c)^2$ 有相同的值和相同的斜率，所以通過 x 軸上各點的解並不唯一。事實上我們可以把它們拼接起來：對於 $p < q$，

$$y = \begin{cases} (x-p)^2, & x < p, \\ 0, & p \le x \le q, \\ (x-q)^2, & x > q \end{cases}$$

有連續的導數，並且處處滿足方程。所以嚴格來說，通過 (a, b^2) 的「兩個解」是指在該點附近與那兩條拋物線吻合的兩個解；離開該點之後，解一旦到達 x 軸，便可以沿着該軸走一段才離開。

驗算

- 代回原式：對於 $y = (x - a \pm b)^2$，在 $x = a$ 時得 $y = b^2$，而 $(y')^2 = 4y$ 恆成立。
- 在 (a, b^2) 的兩個斜率是 $2(a - c) = \pm 2b$，它們的平方都是 $4b^2 = 4y$，符合要求。
- 數值上，以中心差分（central difference）計算導數，確認了隨機選取的拋物線以及上述取 $p = -1$、$q = 1$ 的拼接曲線都滿足 $(y')^2 = 4y$，亦確認了通過 $(1, 1)$ 和 $(-1, 1)$ 的解分別有 $c \in \{0, 2\}$ 和 $c \in \{-2, 0\}$，兩者只共有 $c = 0$。

常見錯誤

- 只寫 $y' = 2\sqrt{y}$，結果通過每一點只得到半條拋物線。
- 忘記了 $y = 0$：它是一個真正的解，而且正正是最後一部分所要找的公切線。
- 以為通過 $(a_1, 1)$ 和 $(a_2, 1)$ 而又經過原點的兩個解是不同的曲線；其實兩者都是 $y = x^2$。

STEP 之外

這個方程是解的唯一性（uniqueness）失效的標準例子。皮卡–林德勒夫定理（Picard–Lindelöf theorem）保證，當 f 對 y 滿足利普希茨（Lipschitz）條件時，$y' = f(x, y)$ 通過一點的解恰好只有一個；但 $\pm 2\sqrt{y}$ 在 $y = 0$ 附近並不滿足利普希茨條件，而那裏正是拋物線與奇異解相遇之處。單參數曲線族的包絡線，以及它們為克萊羅（Clairaut）方程一類方程所帶來的奇異解，是常微分方程（ODE）入門課程中的經典課題。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教科書），以類似這個的例子討論了解的存在性和唯一性。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。