詳細解答

STEP III 1994，第 3 題

純數學 • 球面、平面與扣連

STEP III 1994，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/94-s3-q3

關鍵思路

每個圓各自位於一個平面上，而這兩個平面相交於直線 L。因此 C_1 能夠穿過 C_2 所在平面的地方，就只有它在 L 上的兩個點，反過來也是一樣。於是，兩個圓是否互相扣連，歸根究底是一個一維的問題：L 上的四個點沿着這條直線是怎樣排列的。

解答

平面與球面

設一個球面（sphere）的球心為 Q、半徑為 r，並設 d 為 Q 到平面 Π 的距離。設 F 為由 Q 到 Π 的垂足（foot of the perpendicular）。對於 Π 上的一點 X，由畢氏定理（Pythagoras）得 $QX^2 = d^2 + FX^2$，所以 X 在球面上當且僅當 $FX^2 = r^2 - d^2$。因此：

- 若 $d > r$，平面與球面不相交；
- 若 $d = r$，平面與球面相切於唯一的一點 F（它是一個切平面（tangent plane））；
- 若 $d < r$，交集是 Π 上的一個圓，圓心為 F，半徑為 $\sqrt{r^2 - d^2}$。當 $d = 0$ 時，這是一個大圓（great circle），半徑為 r。

已知資料

配方（completing the square）後，S_2 為

$$x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3,$$

球心為 $(0,3,2)$，半徑為 $\sqrt{3}$。球面 S_1 的球心為 O，半徑為 $\sqrt{7}$。

O 到 P_1 的距離為 $\frac{|-1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} < \sqrt{7}$，所以 C_1 確實是一個圓，半徑為 $\sqrt{7 - \frac{1}{10}}$。$(0,3,2)$ 到 P_2 的距離為 $\frac{|0-3+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < \sqrt{3}$，所以 C_2 是一個半徑為 $\sqrt{3-2} = 1$ 的圓。它的圓心就是垂足 $(0,3,2) + (1,-1,0) = (1,2,2)$；驗證一下：$1 - 2 + 1 = 0$。

直線 L

把兩個平面方程相減，得 $2x - 2 = 0$，所以 $x = 1$，繼而 $y = x + 1 = 2$，而 z 可取任意值。所以

$$L = \{(1,2,t) : t \in \mathbb{R}\},$$

即通過 $(1,2,0)$ 的鉛垂線。

在 S_1 上：$1 + 4 + t^2 = 7$，所以 $t = \pm\sqrt{2}$。因此 L 與 S_1 相交於

$$(1,2,\sqrt{2}) \quad \text{和} \quad (1,2,-\sqrt{2}).$$

在 S_2 上：$1 + 1 + (t-2)^2 = 3$，所以 $t - 2 = \pm 1$。因此 L 與 S_2 相交於

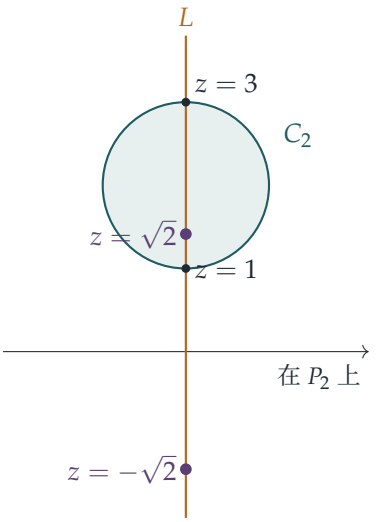
$$(1,2,1) \quad \text{和} \quad (1,2,3).$$

由於 L 位於 P_1 上，L 在 S_1 上的點正好就是 L 在 C_1 上的點；同樣地，L 在 S_2 上的點就是 L 在 C_2 上的點。特別地，$(1,2,1)$ 和 $(1,2,3)$ 是 C_2 一條直徑的兩個端點，這與它的圓心 $(1,2,2)$ 和半徑 1 吻合。

兩個圓是否互相扣連？

首先，兩個圓並不相交。任何公共點都必定位於 $P_1 \cap P_2 = L$ 上，而 C_1 在 L 上的點（$z = \pm\sqrt{2}$）與 C_2 在 L 上的點（$z = 1,3$）並不相同。

設 D_2 為 P_2 上以 C_2 為邊界的平面圓盤（disc）。它與 L 的交集是由 $(1,2,1)$ 到 $(1,2,3)$ 的直徑，即滿足 $1 \le t \le 3$ 的點 $(1,2,t)$。



圖中所示是平面 P_2，當中 C_2 及其圓盤以陰影表示。紫色的點是 C_1 穿過 P_2 的位置。

想一想 為甚麼 C_1 在這兩個點真的是穿過 P_2，而不只是與它相切？

直線 L 把平面 P_1 分成兩個半平面（half-plane），而由於 P_1 沿着 L 橫越 P_2，這兩個半平面分別位於 P_2 的兩側。圓 C_1 與 L 相交於兩個不同的點，所以 L 把 C_1 切成兩段弧，每個半平面各有一段。因此 C_1 的一段弧完全位於 P_2 的一側，另一段弧則完全位於另一側，而 C_1 在 $(1, 2, \sqrt{2})$ 和 $(1, 2, -\sqrt{2})$ 穿過 P_2，此外再無其他穿越點。

現在 $1 < \sqrt{2} < 3$，所以在 $(1, 2, \sqrt{2})$ 的穿越點位於圓盤 D_2 之內。但 $-\sqrt{2} < 1$，所以在 $(1, 2, -\sqrt{2})$ 的穿越點位於圓盤之外。沿 C_1 繞一圈，我們恰好穿過 C_2 所張成的圓盤一次，然後在圓盤之外越過 P_2 返回。換言之，C_1 穿過 C_2 一次，就像鏈條上相扣的兩個環。

沿着 L，這四個點的次序是

$$-\sqrt{2} < 1 < \sqrt{2} < 3,$$

所以來自 C_1 的一對點與來自 C_2 的一對點互相交錯（interleave）。正正是這一點令 C_1 穿過 D_2 一次。（假如兩對點都沒有把對方分隔開，C_1 就會穿過 D_2 兩次或完全不穿過，兩個圓便不會互相扣連。）因此**圓 C_1 與 C_2 互相扣連**（linked）。

我們無法把它們拉開：任何把它們變成兩個相距甚遠的圓的連續移動，都必須把 C_1 穿過 C_2 的圓盤的次數由奇數變為偶數。穿越點總是成對地出現和消失，除非其中一個圓穿過另一個圓，而在不剪斷的情況下把它們分開，是不容許這樣做的。

驗算

把各點逐一代入：例如 $(1,2,1)$ 給出 $3-2-1=0$、$1-2+1=0$ 和 $1+4+1-12-4+10=0$。數值方面，我們把兩個圓參數化（parametrise），並計算高斯（Gauss）的環繞積分（linking integral）$\frac{1}{4\pi}\oint\oint \frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot(\mathrm{d}\mathbf{r}_1\times\mathrm{d}\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}$，得到 1.002（不扣連的一對圓會給出 0）。我們亦求得兩個圓之間的最短距離約為 0.09，所以它們十分接近，但並不相碰。

常見錯誤

- 只檢查兩個圓是否相交。它們並不相交，但單憑這一點完全無法說明它們是否扣連。
- 忘記了 C_1 與 P_2 的穿越點必定位於 L 上，反而在別處尋找。
- 弄錯 S_2 的球心：$-6y$ 和 $-4z$ 兩項給出的球心是 $(0,3,2)$，而不是 $(0,-3,-2)$。

STEP 之外

兩條互不相交的閉曲線（closed curve）是否扣連，是由一個整數不變量（invariant）來量度的，稱為環繞數（linking number）。計算它的方法，可以是數算其中一條曲線穿過另一條曲線所張成的曲面的帶符號穿越次數（這正是我們所做的），也可以是使用「驗算」一節中高斯的二重積分（double integral）。環繞數是踏入紐結理論（knot theory）和代數拓撲（algebraic topology）的第一步。Colin Adams 的 *The Knot Book*（一本紐結理論入門書）是十分易讀的入門讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。