詳細解答

STEP III 1994，第 2 題

純數學 • 回文四次方程

STEP III 1994，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/94-s3-q2

關鍵思路

(i) 中的四次方程是迴文（palindromic）的：它的係數由前往後讀和由後往前讀都一樣。除以 x^2 之後，x^2 與 x^{-2} 配成一對，x 與 x^{-1} 配成一對，而這兩對都可以用 $y = x + x^{-1}$ 表示，於是四次方程（quartic）便簡化成 y 的二次方程（quadratic）。(ii) 沒有提示，所以我們要找出同一種對稱性（symmetry）的變奏：只要容許加入一個縮放因子，係數 1, 1, −10, −4, 16 同樣可以配對，由此想到代換（substitution）$y = x - 4/x$。

解答

第 (i) 部分

常數項為 $1 \neq 0$，所以 $x = 0$ 不是根（root），我們可以除以 x^2：

$$x^2 + 10x + 26 + \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \qquad \text{即} \qquad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0.$$

設 $y = x + x^{-1}$，則 $y^2 = x^2 + 2 + x^{-2}$，所以 $x^2 + x^{-2} = y^2 - 2$。方程變成

$$y^2 - 2 + 10y + 26 = 0 \iff y^2 + 10y + 24 = 0 \iff (y+4)(y+6) = 0,$$

所以 $y = -4$ 或 $y = -6$。現在回到 x，把 $x + x^{-1} = y$ 兩邊乘以 x（因為 $x \neq 0$，這一步同樣沒有問題）：

$$x + \frac{1}{x} = -4 \iff x^2 + 4x + 1 = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{3},$$
$$x + \frac{1}{x} = -6 \iff x^2 + 6x + 1 = 0 \iff x = -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

這是四個互不相同的數，而四次方程最多只有四個根，所以方程的解是

$$x = -2 \pm \sqrt{3}, \qquad x = -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

留意這些根是以互為倒數（reciprocal）的形式成對出現的：$(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3}) = 1$ 和 $(-3+2\sqrt{2})(-3-2\sqrt{2}) = 1$。迴文多項式（polynomial）必然如此，因為把 x 換成 $1/x$ 再乘以 x^4，便會得回同一條方程。

第 (ii) 部分

想一想 係數 1, 1, −10, −4, 16 並不對稱。有沒有類似 (i) 的代換仍然行得通？

比較外側的兩對係數。常數項是首項係數（leading coefficient）的 $16 = 4^2$ 倍，而 x 的係數是 x^3 的係數的 -4 倍。因此各項可以這樣配對：

$$x^4 + 16 = x^2\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right), \qquad x^3 - 4x = x^2\left(x - \frac{4}{x}\right).$$

這就是把 $1/x$ 換成 $-4/x$ 之後的迴文規律。由於 $x = 0$ 不是根（常數項是 16），除以 x^2 可得

$$\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) + \left(x - \frac{4}{x}\right) - 10 = 0.$$

設 $y = x - 4/x$。則 $y^2 = x^2 - 8 + 16/x^2$，所以 $x^2 + 16/x^2 = y^2 + 8$，而

$$y^2 + 8 + y - 10 = 0 \iff y^2 + y - 2 = 0 \iff (y-1)(y+2) = 0,$$

得 $y = 1$ 或 $y = -2$。把 $x - 4/x = y$ 乘以 x：

$$x - \frac{4}{x} = 1 \iff x^2 - x - 4 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2},$$
$$x - \frac{4}{x} = -2 \iff x^2 + 2x - 4 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{5}.$$

這同樣是四個互不相同的根，所以全部的根就是這些：

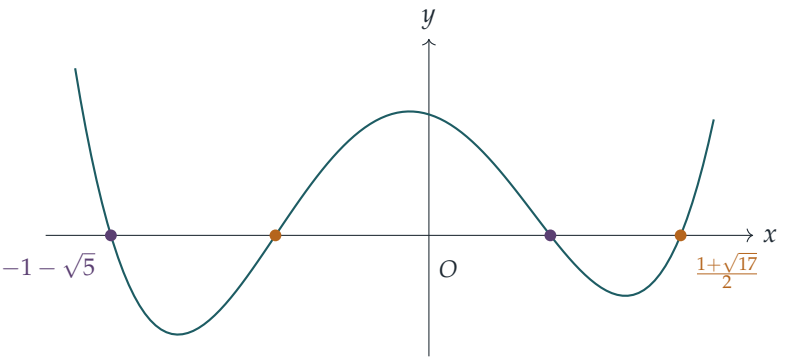
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}, \qquad x = -1 \pm \sqrt{5}.$$

這次各對根的積是 -4 而不是 1：對稱性現在是 $x \mapsto -4/x$。

作為驗算，以上的運算相當於因式分解（factorisation）

$$x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 16 = (x^2 - x - 4)(x^2 + 2x - 4),$$

你可以展開來確認：x^3 項給出 $2 - 1 = 1$，x^2 項給出 $-4 - 2 - 4 = -10$，而 x 項給出 $4 - 8 = -4$。



(ii) 中四次多項式的圖像與橫軸相交四次：琥珀色的根來自 $x^2-x-4=0$，紫紅色的根來自 $x^2+2x-4=0$。

驗算

- 根的積：在 (i) 中，四個根相乘得 $1\cdot 1 = 1$，即常數項；在 (ii) 中，它們相乘得 $(-4)(-4)=16$，同樣是常數項。
- 根的和：在 (i) 中，$(-4)+(-6) = -10$，即 x^3 係數的相反數；在 (ii) 中，$1+(-2)=-1$，情況相同。
- 數值上，$x=-2+\sqrt{3}\approx -0.268$ 和 $x=-3-2\sqrt{2}\approx -5.828$ 都令 (i) 中的四次多項式的值為零，誤差在 10^{-9} 之內；而 $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{17})\approx 2.562$ 和 $x=-1-\sqrt{5}\approx -3.236$ 在 (ii) 中亦然。

常見錯誤

- 忘記交叉項(cross term)：$x^2+x^{-2}=y^2-2$，而不是 y^2；在 (ii) 中則是 $x^2+16x^{-2}=y^2+8$，這裏是加號，因為 $(x-4/x)^2$ 的交叉項是 -8。
- 在 (ii) 中嘗試 $y=x+4/x$。這樣可得 $x^2+16/x^2=y^2-8$，卻無法得出 x^3-4x，因為它的正負號要求用 $x-4/x$。
- 求出 y 的值便停下來。題目要求的是 x，而每個 y 的值對應兩個 x 的值。

STEP 之外

這個技巧之所以行得通，是因為這些多項式在某個代換之下保持不變(invariant)：(i) 中是 $x\mapsto 1/x$，(ii) 中是 $x\mapsto -4/x$。y 這個量在該代換之下不變，而任何在該代換下不變

的多項式表達式，都可以用 y 來表示。這是對伽羅瓦理論（Galois theory）的初步一瞥：在這套理論中，多項式各根之間的對稱性決定了對應的方程可以怎樣求解。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是了解這些想法如何發展下去的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。