詳細解答

STEP III 1994，第 14 題

概率與統計 • 幾何概率

> **STEP III 1994，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q14

關鍵思路

圓周角（inscribed angle）等於所對的弧在圓心所張的角的一半。因此，三角形的三個角正好是 π 乘以 P、Q、R 把圓分成的三段弧，而弧長以佔圓周的比例來量度。問題於是變成：一個圓怎樣被隨機分成三段？而這其實是一個關於三角形內面積的問題。

解答

建立模型

以佔圓周的比例來量度圓上的位置，這樣圓的「長度」就是 1。由旋轉對稱性（rotational symmetry），P 的位置無關重要，所以把 P 放在 0。於是 Q 和 R 的位置是獨立的，並在 $[0,1)$ 上均勻分佈（uniformly distributed）。

設 $U < V$ 為 Q 和 R 的位置由小至大的排列。數對 (U,V) 在區域 $0 < u < v < 1$ 上均勻分佈，而這個區域的面積是 $\frac{1}{2}$，所以它的聯合密度（joint density）在該區域上是 2。（兩點重合的概率是 0，下文所有邊界情況亦然。）三段弧是

$$X = U, \qquad Y = V - U, \qquad Z = 1 - V, \qquad X + Y + Z = 1.$$

變數代換 $(u,v) \mapsto (x,y) = (u, v-u)$ 的雅可比行列式（Jacobian）是 1，所以 (X,Y) 在三角形

$$T = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\},$$

上的密度是 2，而這個三角形的面積是 $\frac{1}{2}$。因此，下文每一個概率都是 T 內某塊面積的兩倍。

想一想 為甚麼三角形的每個角都是 π 乘以一段弧？

三角形在 R 的角是一個圓周角，它所對的是不包含 R 的那段弧 PQ。根據圓周角定理（inscribed angle theorem），它等於該弧在圓心所張的角的一半。一段佔圓周比例為 x 的弧，在圓心所張的角是 $2\pi x$，所以在 R 的角是 πx。每個頂點的情況都一樣，所以 PQR 的三個角是 πX、πY 和 πZ（它們的和是 π，正如所料）。因此

$$\text{某個角大於}k\pi \iff \text{對應的弧大於}k.$$

設 A_X、A_Y 和 A_Z 分別為事件 $X > k$、$Y > k$ 和 $Z > k$。我們要求 $\mathrm{P}(A_X \cup A_Y \cup A_Z)$。

一段弧大於 k

對於 $0 \le k \le 1$：

- A_X 是 T 中 $x > k$ 的部分：一個兩條直角邊均為 $1-k$ 的三角形，面積是 $\frac{1}{2}(1-k)^2$。
- A_Y 是 $y > k$ 的部分：同樣的計算給出面積 $\frac{1}{2}(1-k)^2$。
- A_Z 是 $x + y < 1 - k$ 的部分：位於角落、兩條直角邊均為 $1-k$ 的三角形，面積是 $\frac{1}{2}(1-k)^2$。

乘以二，得 $\mathrm{P}(A_X) = \mathrm{P}(A_Y) = \mathrm{P}(A_Z) = (1-k)^2$。

$\frac{1}{2} \le k \le 1$ 的情況

最多只有一段弧可以大於 k：假如有兩段，它們的總和就會大於 $2k \ge 1$，但三段弧加起來才是 1。所以事件 A_X、A_Y、A_Z 互斥（mutually exclusive），而

$$\mathrm{P}(\text{某個角大於}k\pi) = 3(1-k)^2,$$

正是所求。

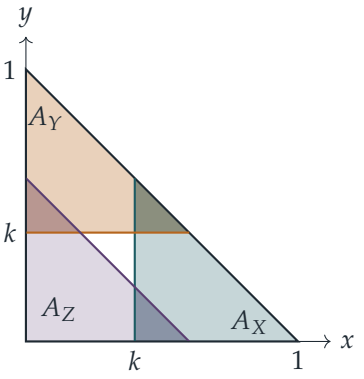
$\frac{1}{3} \le k \le \frac{1}{2}$ 的情況

現在可以有兩段弧同時大於 k，所以我們使用容斥原理（inclusion–exclusion）。

兩段弧。 $A_X \cap A_Y$ 是 T 中 $x > k$、$y > k$、$x + y < 1$ 的部分。代入 $x = k + s$、$y = k + t$，條件變成 $s, t > 0$、$s + t < 1 - 2k$，這是一個兩條直角邊均為 $1 - 2k \ge 0$ 的三角形，面積是 $\frac{1}{2}(1-2k)^2$。所以 $\mathrm{P}(A_X \cap A_Y) = (1-2k)^2$。另外兩對的結果相同：例如 $A_X \cap A_Z$ 是 $x > k$、$y > 0$、$x + y < 1 - k$，同樣是一個兩條直角邊均為 $1 - 2k$ 的三角形。

三段弧。 三段弧全部大於 k 就需要 $X + Y + Z > 3k \ge 1$，這是不可能的。所以三個事件的交集的概率是 0。

下圖顯示 $k = 0.4$ 時的 T：三個位於角落的三角形是 A_X、A_Y、A_Z，顏色較深的重疊部分是兩兩的交集。



由容斥原理，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_X \cup A_Y \cup A_Z) &= 3(1-k)^2 - 3(1-2k)^2 + 0 \\ &= 3\big[(1-k)-(1-2k)\big]\big[(1-k)+(1-2k)\big] \\ &= 3k(2-3k).\end{aligned}$$

所以當 $\frac{1}{3} \le k \le \frac{1}{2}$ 時，至少有一個角大於 $k\pi$ 的概率是

$$3k(2-3k) = 6k - 9k^2.$$

驗算

- 在 $k = \frac{1}{2}$ 時，兩條公式都給出 $\frac{3}{4}$，所以它們連續地銜接起來。這就是那個經典結果：隨機的圓內接三角形是鈍角三角形的概率為 $\frac{3}{4}$。
- 在 $k = \frac{1}{3}$ 時，我們得到 $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 1$。這是對的：最大的角永遠不小於 $\frac{\pi}{3}$，因為三個角加起來是 π。
- 在 $k = 1$ 時，我們得到 0，因為沒有角可以大於 π。
- 模擬 4×10^5 個隨機三角形，直接由坐標計算各個角，在 $k = 0.4$ 時得到 0.9602（公式給出 0.96），在 $k = 0.6$ 時得到 0.4783（公式給出 0.48）。

常見錯誤

- 用了整段弧 PQ，而不是不包含第三個頂點的那段弧。兩段弧 PQ 之中，只有一段是 R 所對的弧。

- 把 X、Y、Z 當作獨立的均勻隨機變數。它們受 $X+Y+Z=1$ 所約束，而老老實實處理這個約束的方法，就是面積圖。
- 在 $k=\frac{1}{2}$ 以下仍然套用 $3(1-k)^2$。當 $k<\frac{1}{2}$ 時，它把有兩個大角的三角形重複計算了，而在 $k=\frac{1}{3}$ 時它會給出 $\frac{4}{3}>1$。

STEP 之外

弧 (X,Y,Z) 在單純形（simplex）$x+y+z=1$ 上均勻分佈。這就是狄利克雷分佈（Dirichlet distribution），它描述隨機點把一個區間或一個圓切開後留下的「間距」。有 n 個點時，同樣的容斥原理給出 $\mathrm{P}(\text{最大間距}>k)=\sum_j(-1)^{j+1}\binom{n}{j}(1-jk)_+^{n-1}$，這條公式可追溯至 Whitworth。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）對幾何概率和聯合密度有很好的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。