詳細解答

STEP III 1994，第 13 題

概率與統計 • 指數分佈的壽命

> **STEP III 1994，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q13

關鍵思路

一切都源自指數分佈（exponential distribution）壽命的生存函數（survival function）$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$。以「已存活至 t_0」為條件，只不過是把兩個這樣的指數相除，著名的*無記憶性*（memoryless property）正是由此而來。直至兩條繩都失效為止的時間，是兩個獨立（independent）壽命的*最大值*，而最大值不超過 t 恰好等價於每個壽命都不超過它。因此我們先求出它的分佈函數（distribution function），然後求導。至於最後一部分，「兩條繩在同一場表演中失效」是指兩條繩在同一個區間 $((n-1)h,\, nh]$ 內失效，再對 n 求和。這個和是一個等比級數（geometric series）。

解答

已在使用中的繩

設 T 為該繩的總壽命，則對 $t \geq 0$ 有

$$\mathrm{P}(T > t) = \int_t^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

已知該繩已經撐過了 t_0 小時，即 $T > t_0$。設 $S = T - t_0$ 為它還能再用的時間。對 $s \geq 0$，事件 $\{T > t_0 + s\}$ 包含於 $\{T > t_0\}$ 之內，所以

$$\mathrm{P}(S > s \mid T > t_0) = \frac{\mathrm{P}(T > t_0 + s)}{\mathrm{P}(T > t_0)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t_0+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t_0}} = \mathrm{e}^{-\lambda s}.$$

因此，剩餘時間 S 的概率密度（density）在 $s \geq 0$ 時為 $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda s}$（在 $s < 0$ 時為 0）。無論 t_0 是多少，它都服從參數同樣為 λ 的指數分佈。

詮釋。用過的繩與新繩完全一樣好。繩並不「記得」自己過去用了多久，無論繩齡多大，

它在接下來一小段時間 δt 內失效的機會都約為 $\lambda\,\delta t$（即失效率（failure rate）為常數）。這種模型適用於由突發的隨機意外所造成的失效。但對真實的繩來說並不切合實際：繩會磨損、起毛，所以舊繩應該更容易在短期內失效。採用失效率隨繩齡遞增的模型會更好。表演者堅持使用新繩，在現實中是明智的，儘管在這個模型之下並無分別。

直至兩條新繩都失效的時間

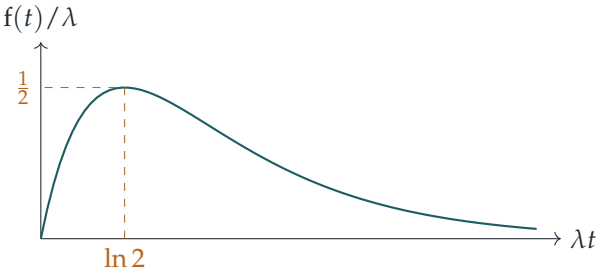
設 T_1, T_2 為兩條新繩的壽命。兩者互相獨立，各自的分佈函數為 $\mathrm{P}(T_i \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ $(t \ge 0)$。兩條繩到時刻 t 都已失效，恰好等價於較遲的那次失效已經發生，所以我們要求的時間是 $M = \max(T_1, T_2)$。現在 $M \le t$ 當且僅當 $T_1 \le t$ 並且 $T_2 \le t$，所以由獨立性得

$$\mathrm{P}(M \le t) = \mathrm{P}(T_1 \le t)\,\mathrm{P}(T_2 \le t) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^2 \qquad (t \ge 0),$$

而對 $t < 0$ 則有 $\mathrm{P}(M \le t) = 0$。利用鏈式法則（chain rule）求導，

$$\mathrm{f}(t) = 2(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} = 2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) \quad (t \ge 0),$$

而對 $t < 0$ 則有 $\mathrm{f}(t) = 0$，正如題目所求。



與單一指數壽命不同，M 在 $t = 0$ 處的密度為 0，因為兩次失效不可能一開始就同時發生。密度在 $\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$ 處達到最高點。

兩條繩都在第 n 場表演中失效

第 n 場表演對應表演時間的區間 $((n-1)h,\, nh]$。記 $q = \mathrm{e}^{-\lambda h}$。對其中一條繩，

$$\mathrm{P}((n-1)h < T_i \le nh) = \mathrm{e}^{-\lambda(n-1)h} - \mathrm{e}^{-\lambda nh} = q^{n-1}(1 - q).$$

想一想 我們應否把 $\mathrm{f}(t)$ 在第 n 場表演的時段上積分？

不應該。$\int_{(n-1)h}^{nh} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ 是第二次失效發生在第 n 場表演中的概率。第一條繩可能早在之前的某場表演中已經失效。我們需要的是每一條繩都在第 n 場表演中失效，而兩條繩互相獨立，所以

$$p_n = (q^{n-1}(1 - q))^2 = \mathrm{e}^{-2\lambda(n-1)h}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda h})^2.$$

兩條繩在同一場表演中失效

對 $n = 1, 2, 3, \ldots$，各個「兩條繩都在第 n 場表演中失效」的事件互斥（mutually exclusive），所以我們把它們的概率相加。這是一個公比為 $q^2 < 1$ 的等比級數（因為 $\lambda h > 0$）：

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = (1-q)^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{2(n-1)} = \frac{(1-q)^2}{1-q^2} = \frac{1-q}{1+q}.$$

現在把分子和分母同乘以 $\mathrm{e}^{\lambda h/2}$：

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda h}}{1+\mathrm{e}^{-\lambda h}} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda h/2} - \mathrm{e}^{-\lambda h/2}}{\mathrm{e}^{\lambda h/2} + \mathrm{e}^{-\lambda h/2}} = \tanh\left(\frac{\lambda h}{2}\right),$$

這就是所要求的結果。

驗算

- $\int_0^{\infty} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \left[(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^2\right]_0^{\infty} = 1$，所以 f 確實是一個概率密度。
- 極限情況：當 $h \to \infty$（一場永不完結的表演）時，答案 $\tanh(\lambda h/2) \to 1$。當 $h \to 0$ 時，它趨向 0，因為兩個連續型壽命幾乎不可能落在同一個極短的區間內。當 h 很小時，它約為 $\lambda h/2$。
- 數值上，取 $\lambda = 0.7$ 和 $h = 0.8$，級數與 $\tanh(0.28)$ 都給出 0.27291。模擬 2×10^5 對繩所得的結果為 0.2746，而 $p_1 \approx 0.1839$ 亦與模擬所得的 0.1848 吻合。

常見錯誤

- 用了最小值而非最大值。最小值是直至第一條繩失效的時間，它服從參數為 2λ 的指數分佈。
- 把 f 在第 n 場表演的時段上積分來求 p_n。這些概率加起來是 1，而不是 $\tanh(\lambda h/2)$。

STEP 之外

無記憶性刻劃了指數分佈：它是唯一具有這個性質的連續型分佈。在可靠性理論（reliability theory）中，「失效率」（風險函數，hazard function）$\mathrm{f}(t)/\mathrm{P}(T > t)$ 只有在指數分佈下才是常數。磨損則以遞增的風險函數來建模，例如採用韋布爾分佈（Weibull distribution）。獨立變量的最大值和最小值是次序統計量（order statistics）的兩個極端情況，你會在大學的第一門概率課程中遇到它們。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）涵蓋了以上所有內容。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。