詳細解答

STEP III 1994，第 12 題

概率與統計 • 首步分析

> **STEP III 1994，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q12

關鍵思路

把各局兩局兩局地成對來看。領先 2 局的情況只可能在打完偶數局之後出現，而每打完一對局，兩名球員各發球一次，於是發球權又回到原來的一方。這樣，整場比賽就變成一個簡單的重複試驗：每一對局不是由 A 全勝，就是由 B 全勝，又或者各勝一局，而各勝一局的話，雙方便回到平手的局面。標準網球其實是同一回事，只是頭兩對局要特別處理。

解答

全篇記

$$a = p_A p_B, \qquad b = q_A q_B, \qquad s = p_A q_B + q_A p_B.$$

在連續的一對局中（兩名球員各發球一局），a 是 A 兩局全勝的概率（probability），b 是 B 兩局全勝的概率，s 是兩人各勝一局的概率（或是 A 保住發球局而 B 也保住發球局，或是雙方都破發）。我們按題目的原意，假設不同局的結果互相獨立（independent）。結果只有這三種，所以

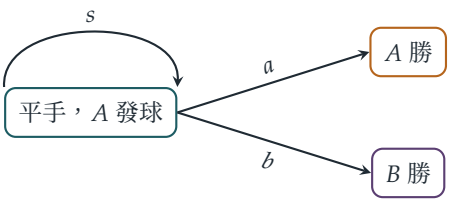
$$a + b + s = (p_A + q_A)(p_B + q_B) = 1.$$

簡化網球

每打一局，比分之差就改變 ± 1，所以打完偶數局後分差是偶數，打完奇數局後分差是奇數。因此，恰好領先 2 局的情況，最早只可能在第 $2, 4, 6, \ldots$ 局之後出現；而如果打完偶數局後比賽仍未結束，雙方必定是平手。

於是把比賽分成一對一對（第 1–2 局、第 3–4 局、...）。由平手、輪到 A 發球的局面開

始，下一對局有概率 a 令比賽以 A 勝出告終，有概率 b 令比賽以 B 勝出告終，另有概率 s 令我們回到平手、又輪到 A 發球的局面。這時的情況與開始時完全一樣，所以



$$P_{\text{short}} = a + sP_{\text{short}} \quad \Longrightarrow \quad P_{\text{short}} = \frac{a}{1-s} = \frac{a}{a+b} = \frac{p_A p_B}{p_A p_B + q_A q_B},$$

其中用到 $1 - s = a + b$。（除以 $1 - s$ 並無問題，除非 $s = 1$；那是每一對局都各勝一局、比賽永遠不會結束的退化情況。）

如果由 B 先發球，每一對局就是先打一局 B 的發球局，再打一局 A 的發球局。A 兩局全勝、B 兩局全勝、兩人各勝一局的概率分別是 $p_B p_A$、$q_B q_A$ 和 $q_B p_A + p_B q_A$：仍然是同樣的 a、b、s，因為一對局之中兩局的先後次序並無影響。同樣的論證給出同樣的答案，所以 P_{short} 與誰先發球無關。

4 局內分出勝負

未打完 4 局之前，比賽不可能分出勝負。打完 4 局後（即兩對局，由 A 先發球），分差是偶數，而比賽分出勝負，當且僅當比分是 4–0、3–1、1–3 或 0–4。用兩對局來表示：

- A 以 4–0 勝出：A 兩對局全勝，概率為 $a^2 = p_A^2 p_B^2$；
- 0–4：B 兩對局全勝，概率為 $b^2 = q_A^2 q_B^2$；
- A 以 3–1 勝出：A 全勝其中一對局，另一對局各勝一局，兩種次序都可以，概率為 $2as$；
- 1–3：同理，概率為 $2bs$。

相加得

$$\Pr(\text{4 局內分出勝負}) = p_A^2 p_B^2 + q_A^2 q_B^2 + 2(p_A p_B + q_A q_B)(p_A q_B + q_A p_B),$$

正是所求。

概率相等時的標準網球

如果比賽在 4 局內未分勝負，比分就是 2–2。這種情況的概率是 $s^2 + 2ab$（兩對局都各勝一局，或兩名球員各全勝一對局，兩種次序都可以）。由 2–2 開始，「領先 2 局」的規則

正好就是簡化網球由平手開始的規則，而第 5 局由 A 發球；所以由這裏開始，A 勝出的概率是 P_{short}。因此，一般而言，

$$P_{\text{stan}} = a^2 + 2as + (s^2 + 2ab)P_{\text{short}}.$$

現在取 $p_A = p_B = p$ 和 $q_A = q_B = q$，於是 $a = p^2$，$b = q^2$，$s = 2pq$，而 $P_{\text{short}} = \dfrac{p^2}{p^2+q^2}$。那麼

$$P_{\text{stan}} = p^4 + 4p^3q + \frac{6p^4q^2}{p^2+q^2}.$$

想一想 有沒有辦法比較 P_{stan} 與 P_{short}，而無須把所有式子按 p 和 q 的冪展開？

有：把簡化網球同樣在頭四局上展開。把 $P_{\text{short}} = a + sP_{\text{short}}$ 連用兩次，

$$P_{\text{short}} = a + as + s^2P_{\text{short}}.$$

用文字來說：A 全勝第一對局；或者第一對局各勝一局而 A 全勝第二對局；或者兩對局都各勝一局，一切重新開始。從 P_{stan} 的公式減去此式，s^2P_{short} 兩項互相抵消：

$$\begin{aligned} P_{\text{stan}} - P_{\text{short}} &= a^2 + as - a + 2abP_{\text{short}} \\ &= a(a+s-1) + 2abP_{\text{short}} \\ &= -ab + \frac{2a^2b}{a+b} \qquad (\text{因為 } a+s-1 = -b) \\ &= \frac{ab(a-b)}{a+b}. \end{aligned}$$

這個結果對任何 p_A、p_B 都成立。代入 $a = p^2$ 和 $b = q^2$，

$$P_{\text{stan}} - P_{\text{short}} = \frac{p^2q^2(p^2-q^2)}{p^2+q^2} = \frac{p^2q^2(p-q)(p+q)}{p^2+q^2} = \frac{p^2q^2(p-q)}{p^2+q^2},$$

因為 $p+q=1$。這就是所求的結果。

箇中原因從運算過程中已可看出：兩種賽制只在 A 全勝第一對局而 B 全勝第二對局（或次序相反）時才有分別。簡化網球把勝利判給全勝第一對局的一方；標準網球則由 2–2 繼續打下去。兩種次序的概率都是 ab，所以兩者之差是 $ab(2P_{\text{short}} - 1)$，對較強的球員有利。

驗算

- 若 $p = q = \frac{1}{2}$，兩者之差為 0，按對稱性理應如此：兩個概率都是 $\frac{1}{2}$。
- 取 $p = 0.6$：$P_{\text{short}} = 0.36/0.52 \approx 0.6923$，$P_{\text{stan}} = 0.1296 + 0.3456 + 0.124416/0.52 \approx 0.7145$，兩者之差 0.02215 與 $0.0576 \times 0.2/0.52$ 吻合。

- 4 局內分出勝負的概率 $a^2 + b^2 + 2(a+b)s$，與打成 2–2 的概率 $s^2 + 2ab$，相加得 $(a+b+s)^2 = 1$，理應如此。
- 按實際規則用電腦模擬，取 $p_A = 0.7$ 和 $p_B = 0.45$，無論誰先發球，A 在簡化網球中勝出的次數都約佔 65.6%，與 $0.315/0.48 = 0.65625$ 吻合。

常見錯誤

- 忘記 3–1 可以由兩種次序得出（先各勝一局再全勝，或先全勝再各勝一局），因而漏掉因數 2。
- 以為每一局的勝出概率都相同：其實它取決於誰發球，這正是成對分組如此有用的原因。
- 寫出一個無窮等比級數（infinite geometric series），卻沒有留意到它其實就是方程 $P = a + sP$。

STEP 之外

這種逐對分析的論證，是帶有吸收態（absorbing states）的馬可夫鏈（Markov chain）的入門例子，而方程 $P = a + sP$ 就是首步分析（first-step analysis），是求吸收概率（absorption probabilities）的標準方法。同樣的想法可以求出贏得一整盤網球或一局壁球的概率，並進一步引向賭徒破產問題（gambler's ruin）和隨機漫步（random walks）。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）正好以這個程度講解隨機漫步和馬可夫鏈。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。