詳細解答

STEP III 1994，第 11 題

力學 • 剛體的平衡

> **STEP III 1994，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q11

關鍵思路

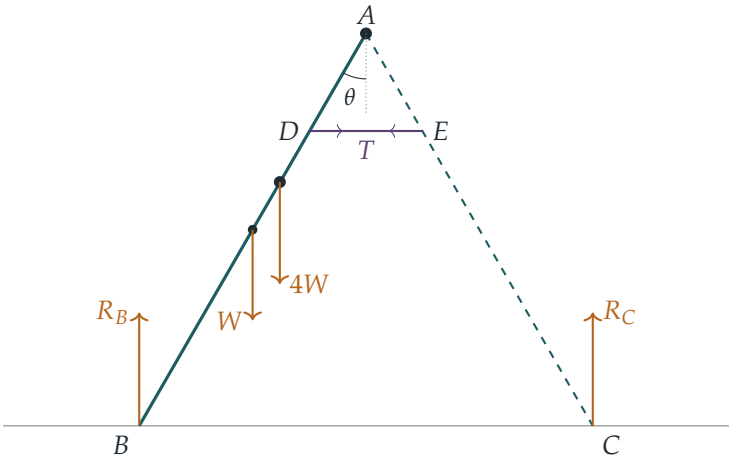
由於地面光滑（smooth），地面施加的力只能沿鉛垂方向，所以把整座梯子視為一個整體，便可立即求出 C 處的反作用力（reaction）。接下來，巧妙之處全在輕質的梯腳 AC：作用於它的力只有三個（地面的反作用力、繩的張力和鉸鏈的力），因此對鉸鏈 A 取矩（taking moments），便可消去未知的鉸鏈力，並把繩的張力（tension）與 C 處的反作用力聯繫起來。虎克定律（Hooke's law）把張力與梯子的角度連在一起，由此可把 β 表示成該角度的函數，然後求其最大值。

解答

建立模型

我們把 AB 視為均勻（uniform）桿，把 AC 視為輕質（light）桿，兩者長度均為 $4a$，在 A 處以光滑鉸鏈（hinge）相連，並把繩視為輕質彈性繩。那人則視為質點（particle）。由對稱性（$AD = AE$ 及 $AB = AC$），繩 DE 是水平的。設每條梯腳與鉛垂線的夾角為 θ，其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。

由於地面光滑，B 和 C 處的反作用力 R_B 和 R_C 都沿鉛垂方向。AB 的重量 W 作用於其中點，與 B 的水平距離為 $2a\sin\theta$；那人的重量 $4W$ 的作用點與 B 的水平距離為 $\beta a\sin\theta$。張力 T 把 D 和 E 互相拉近。



C 處的反作用力

對整座摺梯以 B 為支點取矩（鉸鏈力和張力都是內力，所以不會出現），其中 $BC = 8a\sin\theta$：

$$R_C \cdot 8a\sin\theta = W \cdot 2a\sin\theta + 4W \cdot \beta a\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad R_C = \tfrac{1}{4}W(1+2\beta).$$

沿鉛垂方向分解力，得 $R_B = 5W - R_C = \frac{1}{4}W(19-2\beta)$；由於 $\beta \le 4$（梯級在梯子上），此值為正。所以梯腳永遠不會離開地面。

繩的張力

繩的長度為 $DE = 2a\sin\theta$，自然長度(natural length)為 $\frac{a}{4}$。假如繩是鬆弛的，則 $T = 0$，而下文對 AC 以 A 為支點取矩便會迫使 $R_C = 0$，這是不可能的。所以繩處於拉伸狀態，$\sin\theta > \frac{1}{8}$，而由虎克定律得

$$T = \frac{W\left(2a\sin\theta - \frac{a}{4}\right)}{a/4} = W(8\sin\theta - 1).$$

輕質梯腳 AC 的平衡

> ? **想一想** 為甚麼要單獨考慮 AC，而不是 AB？

梯腳 AC 是輕質的，所以作用於它的力只有三個：C 處的 R_C、E 處的張力 T，以及 A 處的鉸鏈力。對 A 取矩便可消去未知的鉸鏈力。張力沿水平方向，作用點在 A 之下、鉛垂深度為 $a\cos\theta$ 之處；反作用力 R_C 沿鉛垂方向，作用點與 A 的水平距離為 $4a\sin\theta$。所以

$$R_C \cdot 4a\sin\theta = T \cdot a\cos\theta.$$

代入 R_C 和 T：

$$W(1+2\beta)\sin\theta = W(8\sin\theta - 1)\cos\theta,$$
$$\text{所以}\quad 1+2\beta = 8\cos\theta - \cot\theta,$$
$$\text{而}\quad \beta = \tfrac{1}{2}\left(8\cos\theta - \cot\theta - 1\right).$$

對於那人的每個位置 β，平衡（equilibrium）可以成立，當且僅當這條方程有解 θ（且 $\sin\theta > \frac{1}{8}$）。所以 β 的最大可能值，由 $f(\theta) = 8\cos\theta - \cot\theta$ 的最大值決定。

求最大值

求導數，得

$$f'(\theta) = -8\sin\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{1 - 8\sin^3\theta}{\sin^2\theta}.$$

由於 $\sin\theta$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上遞增，當 $\sin\theta < \frac{1}{2}$ 時上式為正，當 $\sin\theta > \frac{1}{2}$ 時上式為負。所以 f 在 $\sin\theta = \frac{1}{2}$（即 $\theta = \frac{\pi}{6}$）時取得最大值，此時

$$f\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = 8\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}, \qquad \beta_{\max} = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - 1\right) \approx 2.10.$$

此值小於 4，所以梯級確實在梯子上；而且 $\sin\theta = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$，所以繩是拉緊的，與我們的假設相符。

梯級的高度

梯級位於由 B 起沿 BA 方向距離 βa 之處，而 BA 與鉛垂線的夾角為 θ，所以它的高度為

$$h = \beta a\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - 1\right) a\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(9-\sqrt{3})\,a}{4} \approx 1.82a.$$

驗算

- 當 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 並取 $W = a = 1$ 時：$T = 8\cdot\frac{1}{2} - 1 = 3$，$R_C = \frac{1}{4}(1 + 3\sqrt{3} - 1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$，而確實有 $R_C \cdot 4\sin\theta = 2.598 = T\cos\theta$。
- 以數值方法驗算：分別對兩條梯腳解出力和力矩的方程，並讓 θ 掃遍 $(0, \frac{\pi}{2})$，結果發現 β 的最大值為 2.09808，出現於 $\theta \approx 30°$，對應的高度為 $1.81699a$。
- 極限情況也合理：當 $\sin\theta \to \frac{1}{8}$ 時，繩變得鬆弛，β 便須為負數；當 $\theta \to \frac{\pi}{2}$ 時，繩的力臂 $a\cos\theta$ 趨於零，所以 β 同樣必須下降。最大值出現在兩者之間，正如所料。

常見錯誤

- 以為 A 處的鉸鏈力是水平的。一般而言並非如此，因為兩條梯腳所受的負荷不同；對 A 取矩，便完全毋須用到這個力。
- 把整段長度 $DE = 2a\sin\theta$ 當作伸長量（extension）。伸長量應為 $2a\sin\theta - \frac{a}{4}$。
- 答案寫成 $\beta_{\max}$（沿梯子量度的距離），而不是題目所問的高度；求高度還須多乘一個因子 $a\cos\theta$。

STEP 之外

這是一道靜力學（statics）題目，其中的位形（configuration，即 θ）並非已知，而是由彈性繩決定，所以各個平衡位置構成一個單參數族，而問題便變成在這個族上求最優化（optimisation）。在大學裏，這正是虛功（virtual work）和勢能（potential energy）方法背後的想法：平衡位置就是勢能的駐點（stationary point），而追問哪些平衡是穩定的，便會引出分歧（bifurcation）理論和突變理論（catastrophe theory）。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）是深入學習力學的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。