詳細解答

STEP III 1994，第 10 題

力學 • 相對速度

STEP III 1994，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

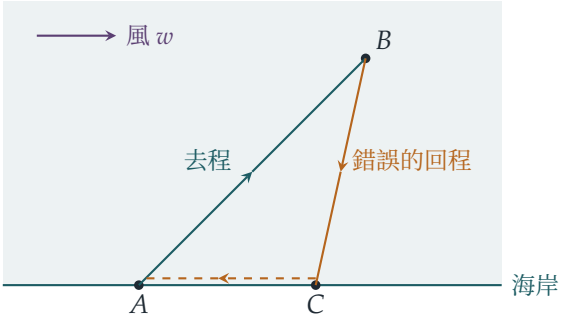
step.maths.org/questions/94-s3-q10

關鍵思路

一切都是向量加法（vector addition）：飛機相對地面的速度，等於它相對空氣的速度加上風的速度。把海岸放在 x 軸上，以 Alphaport 為原點，並把去程的空速（air velocity）寫成分量（components）。把航向（heading）反過來，空速會反向，但風不會反向，因此回程時，運動的向北部分和向東部分表現截然不同，而這正是第一部分的全部要點。至於第二部分，兩個正確的地速（ground speed）來自同一個二次方程（quadratic），於是韋達定理（Vieta's formulas）就能代勞。

解答

我們把飛機看成一個質點（particle），它相對空氣以大小為 v 的恆定速度運動，而空氣則以恆定速度 w 向正東移動（來自西面的風是吹向東面的）。取 Alphaport A 為原點，x 軸向東，y 軸向北，於是海岸就是直線 $y = 0$，而島嶼位於 $y > 0$ 的一側。Betaville B 位於 $\left(\frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{d}{\sqrt{2}}\right)$。速率以 $\mathrm{km\,h^{-1}}$ 為單位，時間以小時為單位。（試卷上把這兩個地方稱為 Alphabet/Alphaport 和 Betaville/Betaport；它們指的是同樣的地方。）



去程

設去程的空速為 (a, b)，則 $a^2 + b^2 = v^2$。相對地面的速度是 $(a + w,\ b)$，它必須指向東北，所以兩個分量相等而且為正：

$$a + w = b > 0.$$

她以 y 方向的速率 b 飛過 y 方向的距離 $\frac{d}{\sqrt{2}}$，而去程所需時間為 t，所以

$$bt = \frac{d}{\sqrt{2}} = (a + w)t. \tag{1}$$

錯誤的回程

採用相反的航向時，她的空速是 $(-a, -b)$，但風仍然加上 $(w, 0)$，所以她相對地面的速度是

$$(w - a,\ -b).$$

? **想一想** 她會在哪裏到達海岸？在 Alphaport 的哪一邊？

向北方向的運動不受風影響：她的 y 坐標由 $y = \frac{d}{\sqrt{2}}$ 起以速率 b 遞減，所以由 (1) 可知，她恰好在時間 t 之後到達 $y = 0$，與去程所需的時間相同。在這段時間內，她的 x 坐標改變了 $(w - a)t$，所以她越過海岸的位置是

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}} + (w - a)t = (a + w)t + (w - a)t = 2wt,$$

這裏再次用到 (1)。因此她降落在 C，位於 Alphaport 以東 $2wt$ 處：去程時，風把她推向東面，而她選定的航向正是為了抵銷這個影響；但回程時，航向所作的修正反了過來，風的推力卻沒有反過來，所以偏移加倍。由於 $2wt > 0$，沿海岸轉向西面的確是正確的方向。

她以空速 v 逆風向正西飛行，地速為 $v - w > 0$（因為 $v > w$）。沿海岸的一段需時 $\dfrac{2wt}{v - w}$，所以整個回程需時

$$t + \frac{2wt}{v - w} = \frac{(v - w) + 2w}{v - w}\, t = \left(\frac{v + w}{v - w}\right) t \text{ 小時},$$

正如所求。

正確的回程

把沿直線 AB 的相對地面速度寫成 $\pm(p, p)$，其中 $\sqrt{2}\, p$ 是地速。空速等於相對地面的速度減去風速，而且大小為 v。

去程時，相對地面的速度為 (p_1, p_1)，空速為 $(p_1 - w,\ p_1)$：

$$(p_1 - w)^2 + p_1^2 = v^2 \iff 2p_1^2 - 2wp_1 + (w^2 - v^2) = 0.$$

回程時，相對地面的速度為 $(-p_2, -p_2)$，其中 $p_2 > 0$，空速為 $(-p_2 - w,\ -p_2)$：

$$(p_2 + w)^2 + p_2^2 = v^2 \iff 2(-p_2)^2 - 2w(-p_2) + (w^2 - v^2) = 0.$$

所以 p_1 和 $-p_2$ 都是同一個二次方程 $2p^2 - 2wp + (w^2 - v^2) = 0$ 的根。它的兩根之積為 $\frac{w^2 - v^2}{2} < 0$，所以一個根為正，一個根為負；p_1 是正的那個，$-p_2$ 是負的那個，因此它們就是兩個相異的根。根據韋達定理，

$$p_1 + (-p_2) = w, \qquad p_1(-p_2) = \frac{w^2 - v^2}{2},$$

即 $p_1 - p_2 = w$ 及 $p_1 p_2 = \frac{1}{2}(v^2 - w^2)$。

來回的距離都是 d，所以去程所需時間為 $t = \dfrac{d}{\sqrt{2}\,p_1}$，而正確回程所需時間為 $\dfrac{d}{\sqrt{2}\,p_2}$。因此

$$\begin{aligned}\frac{d}{\sqrt{2}\,p_2} &= t + \frac{d}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) = t + \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_1 p_2} \\ &= t + \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2w}{v^2 - w^2} = t + \frac{\sqrt{2}\,wd}{v^2 - w^2} \text{ 小時,}\end{aligned}$$

這就是所求的結果。

驗算

- 若 $w = 0$，兩個回程時間都化為 t，在無風的情況下理應如此。
- 取 $v = 300$、$w = 60$、$d = 400$：$t \approx 1.1785\,\text{h}$，錯誤的回程（以數值方法逐步模擬運動而求得）需時 $1.7678\,\text{h} = \frac{360}{240}t$，而正確的回程需時 $1.5713\,\text{h}$，與 $t + \frac{\sqrt{2}\cdot 60\cdot 400}{86400}$ 吻合。對許多組 $v > w$ 和 d 作隨機試算，結果在捨入誤差範圍內一致。
- 錯誤的回程總是比正確的回程慢：這就是不等式 $\frac{2wt}{v-w} > \frac{\sqrt{2}\,wd}{v^2-w^2}$，即 $\sqrt{2}(v+w)t > d$；它之所以成立，是因為去程的地速 $\frac{d}{t} = \sqrt{2}p_1 = \sqrt{2}(p_2 + w)$ 小於 $\sqrt{2}(v+w)$，原因是 $p_2 < v$。

常見錯誤

- 把相對地面的速度反向，而不是把空速反向：飛行員掉頭時，風並不會跟着掉頭。
- 以為風是吹向西面的。「來自西面」的意思是風把飛機帶向東面。
- 用求根公式逐一解兩個二次方程，再把繁複根式（surds）的倒數相減；只要看出 p_1 和 $-p_2$ 是同一個二次方程的根，就可以完全避開這些計算。

STEP 之外

這是相對速度（relative velocity）最簡單的形式：飛機在地面參考系（frame）中的速度，等於它在空氣參考系中的速度加上空氣的速度，也就是一次伽利略（Galilean）參考系變換。同一套記帳方法，只要做得仔細，就是導航、大學一年級力學中的渡河問題，以及（當它在高速下失效時）狹義相對論（special relativity）的動機的基礎。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對運動參考系有詳盡的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。