詳細解答

STEP III 1994，第 1 題

純數學 • 歸約公式

> **STEP III 1994，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q1

關鍵思路

對於第一個積分，把 $\operatorname{sech} t$ 寫成 $\dfrac{\cosh t}{\cosh^2 t} = \dfrac{\cosh t}{1+\sinh^2 t}$：分子正是 $\sinh t$ 的導數（derivative），所以這其實是一個喬裝了的 arctan。至於歸約公式（reduction formula），最自然的做法是分出一個因子 $\operatorname{sech}^2 t$，即 $\tanh t$ 的導數，然後用分部積分法（integration by parts）。恆等式（identity）$\tanh^2 t = 1 - \operatorname{sech}^2 t$ 隨即令 I_n 在右邊重新出現，我們再把它合併起來。

解答

$\operatorname{sech} t$ 的積分

把分子和分母同乘以 $\cosh t$，並利用 $\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$，

$$\int_0^x \operatorname{sech} t \,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\cosh t}{1+\sinh^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

設 $s = \sinh t$，則 $\mathrm{d}s = \cosh t \,\mathrm{d}t$，積分上下限變成 0 和 $\sinh x$，所以

$$\int_0^x \operatorname{sech} t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\sinh x} \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2} = \arctan(\sinh x).$$

另一個同樣好的做法是取 $\operatorname{sech} t = \dfrac{2\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}$ 並設 $u = \mathrm{e}^t$，所得答案的形式是 $2\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}$。兩者是一致的：它們在 $x = 0$ 時都等於零，而且導數都是 $\operatorname{sech} x$。（這個以 x 為變量的函數稱為古德曼函數（Gudermannian）。）

歸約公式

取 $n \geq 2$，並寫 $\operatorname{sech}^n t = \operatorname{sech}^{n-2} t \cdot \operatorname{sech}^2 t$。用分部積分法，取

$$u = \operatorname{sech}^{n-2} t, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \operatorname{sech}^2 t,$$

於是 $v = \tanh t$，而根據鏈式法則（chain rule）（利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sech} t = -\operatorname{sech} t \tanh t$），

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (n-2)\operatorname{sech}^{n-3} t \cdot (-\operatorname{sech} t \tanh t) = -(n-2)\operatorname{sech}^{n-2} t \tanh t.$$

於是

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\operatorname{sech}^{n-2} t \tanh t\right]_0^x + (n-2)\int_0^x \operatorname{sech}^{n-2} t \tanh^2 t \,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2)\int_0^x \operatorname{sech}^{n-2} t \,(1 - \operatorname{sech}^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2) I_{n-2} - (n-2) I_n, \end{aligned}$$

其中在 0 處的邊界項等於零，因為 $\tanh 0 = 0$。

> **想一想** 我們似乎兜了一個圈：I_n 又在右邊出現了。這是個問題嗎？

完全不是，這正是我們想要的。右邊的 I_n 的係數是 $-(n-2)$，而不是 $+1$，所以把它移到左邊便得到 $(n-1)I_n$，而我們可以除以 $n-1 \neq 0$。歸約公式就是

$$\boxed{(n-1) I_n = \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2)\, I_{n-2} \qquad (n \geq 2).}$$

求 I_5

奇數的一串由 $I_1 = \arctan(\sinh x)$ 開始。代入 $n = 3$：

$$2I_3 = \operatorname{sech} x \tanh x + I_1, \qquad \text{所以} \qquad I_3 = \tfrac{1}{2}\operatorname{sech} x \tanh x + \tfrac{1}{2}\arctan(\sinh x).$$

代入 $n = 5$：

$$4I_5 = \operatorname{sech}^3 x \tanh x + 3I_3,$$

所以

$$I_5 = \tfrac{1}{4}\operatorname{sech}^3 x \tanh x + \tfrac{3}{8}\operatorname{sech} x \tanh x + \tfrac{3}{8}\arctan(\sinh x).$$

求 I_6

偶數的一串由 $I_0 = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$ 開始，或者更直接地由 $I_2 = \int_0^x \operatorname{sech}^2 t\,\mathrm{d}t = \tanh x$ 開始（在公式中代入 $n = 2$ 可以確認這一點：$I_2 = \tanh x + 0$）。代入 $n = 4$：

$$3I_4 = \operatorname{sech}^2 x \tanh x + 2I_2, \qquad \text{所以} \qquad I_4 = \tfrac{1}{3}\operatorname{sech}^2 x \tanh x + \tfrac{2}{3}\tanh x.$$

代入 $n = 6$：

$$5I_6 = \operatorname{sech}^4 x \tanh x + 4I_4,$$

所以

$$I_6 = \tfrac{1}{5}\operatorname{sech}^4 x \tanh x + \tfrac{4}{15}\operatorname{sech}^2 x \tanh x + \tfrac{8}{15}\tanh x.$$

偶數次冪的「其他方法」

偶數次冪有一個更簡潔的直接做法。設 $u = \tanh t$，則 $\mathrm{d}u = \operatorname{sech}^2 t\,\mathrm{d}t$，而 $\operatorname{sech}^2 t = 1 - u^2$，所以

$$I_6 = \int_0^x (\operatorname{sech}^2 t)^2 \operatorname{sech}^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\tanh x} (1-u^2)^2\,\mathrm{d}u = \tanh x - \tfrac{2}{3}\tanh^3 x + \tfrac{1}{5}\tanh^5 x.$$

在先前的答案中把 $\operatorname{sech}^2 x$ 換成 $1 - \tanh^2 x$ 再展開，所得的正是這個式子，所以兩種形式是一致的。

驗算

- 當 $x \to \infty$ 時，$\tanh x \to 1$、$\operatorname{sech} x \to 0$ 且 $\arctan(\sinh x) \to \frac{\pi}{2}$，所以 $I_5 \to \frac{3\pi}{16} \approx 0.58905$ 而 $I_6 \to \frac{8}{15}$。在 $[0, 30]$ 上用森遜法則（Simpson's rule）得出 0.589049 和 0.533333。
- 在 $x = 1$ 處，森遜法則給出 $I_5 \approx 0.561566$ 和 $I_6 \approx 0.518343$，與公式吻合；我們亦在 200 個隨機的 x 值上，對 $2 \le n \le 8$ 檢驗過歸約公式。
- I_5 和 I_6 都是 x 的奇函數（odd function），這是必然的，因為 sech 是偶函數（even function）。

常見錯誤

- 弄錯 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sech} t$ 的正負號：它是 $-\operatorname{sech} t \tanh t$，而正是這個負號令邊界項成為正數。
- 把兩個 I_n 合併之後，除以 n 而不是 $n-1$。
- 把答案留作不定積分（indefinite integral）：積分上下限是 0 和 x，所以沒有任意常數，而且每一項在 $x = 0$ 時都應該等於零。

STEP 之外

像這樣的歸約公式，讓你可以用遞歸（recursion）的方法求出一整族積分的值；同一個想法也是沃利斯（Wallis）公式的基礎，該公式處理 $\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$，並由此引出一個關

於 π 的著名無窮乘積（infinite product）。這裏求得的極限 $\int_0^\infty \operatorname{sech}^n t \, \mathrm{d}t$ 是貝塔函數（Beta function）的值，而貝塔函數是大學一年級分析和概率課程中的核心對象。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 有更多歸約公式的練習，而 Abbott 的 *Understanding Analysis* 則為反常積分（improper integral）提供嚴格的處理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。