詳細解答

STEP II 1994，第 9 題

力學 • 剛體的平衡

> **STEP II 1994，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q9

關鍵思路

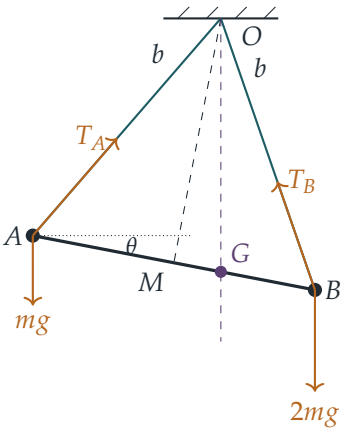
把桿、兩條繩和兩個質點視為一個剛體（rigid body）。作用於它的外力只有兩個重量和 O 點的支承力，因此要達致平衡（equilibrium），作用於質心（centre of mass）G 的合重量，其作用線必須通過 O：即 G 懸於 O 的正下方。這樣一來，求角度就變成純粹的等腰三角形幾何問題。至於張力（tension），則對 B 取力矩（moments），這樣可消去作用於 B 的兩個未知力。

解答

模型。桿和繩都是輕的，繩不可伸長，而 A、B 是質點（particles）。由於 $OA = OB = b$ 且 $AB = 2a$，三角形 OAB 是等腰三角形。設 M 為 AB 的中點；則 $OM \perp AB$，並由畢氏定理（Pythagoras）得

$$OM = h = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

較重的質點 B 懸得較低，桿與水平線成角 θ。



角度

考慮整個系統：桿、繩和質點合在一起。作用於它的外力是 A 處的重量 mg、B 處的重量 $2mg$，以及 O 點支承所施的力。對 O 取力矩，支承力沒有力矩，所以兩個重量對 O 的總力矩必須為零。兩個重量互相平行，故可合成為一個通過兩質點質心 G 的單一力 $3mg$。它對 O 的力矩為零，當且僅當 G 位於通過 O 的鉛垂線上。所以 G 在 O 的正下方。

現在求 G 的位置。它在 AB 上，且 $AG : GB = 2m : m = 2 : 1$，所以 $AG = \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{4a}{3}$，因此

$$MG = AG - AM = \tfrac{4a}{3} - a = \tfrac{a}{3},$$

而 G 在 M 靠近 B 的一側。

想一想 為甚麼角 MOG 等於 θ？

OG 是鉛垂的，而 OM 垂直於桿。把鉛垂線旋轉到 OM 上的旋轉，正是把水平線轉到桿上的那個旋轉，所以 OG 與 OM 之間的夾角等於桿與水平線之間的夾角，即 θ。

三角形 OMG 在 M 處是直角，所以

$$\tan\theta = \frac{MG}{OM} = \frac{a/3}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{a}{3\sqrt{b^2 - a^2}},$$

正如所求。

AO 的張力

再次把桿和質點合起來考慮。作用於這個系統的力是沿 AO 的 T_A、沿 BO 的 T_B，以及兩個重量。（桿內的力是內力。）對 B 取力矩，便可消去 T_B 和重量 $2mg$。

由 B 到直線 OA 的垂直距離，等於三角形 OAB 面積的兩倍除以 OA。該面積為 $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot$

$h = ah$，所以這距離是 $2ah/b$。A 處重量 mg 的力臂（moment arm）等於 A 與 B 之間的水平距離，即 $2a\cos\theta$。這兩個力矩方向相反，令它們互相平衡，得

$$T_A \cdot \frac{2ah}{b} = mg \cdot 2a\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad T_A = \frac{mgb\cos\theta}{h}.$$

由 $\tan\theta = \dfrac{a}{3h}$，且 θ 為銳角，可得 $\cos\theta = \dfrac{3h}{\sqrt{9h^2 + a^2}}$，而 $9h^2 + a^2 = 9b^2 - 8a^2$。因此

$$T_A = \frac{mgb}{h} \cdot \frac{3h}{\sqrt{9b^2 - 8a^2}} = \frac{3mgb}{\sqrt{9b^2 - 8a^2}}.$$

（以同樣的論證對 A 取力矩，可得 $T_B = 2T_A$：每條繩的張力與它所支承的質量成正比。）

驗算

- 若 $a \to 0$，兩條繩變成鉛垂，而 $T_A \to 3mgb/(3b) = mg$，正好是質點 A 所需的張力。
- 對整個系統沿鉛垂方向分解力（resolving），結果應為 $3mg$。取 $a = 1$、$b = 2$、$m = 1$、$g = 9.8$，得 $T_A \approx 11.11\,\text{N}$ 和 $T_B \approx 22.22\,\text{N}$。把它們沿繩的方向分解，鉛垂分量的總和為 $29.4\,\text{N} = 3mg$。
- 以數值方法驗算：隨機選取 2000 組 (a, b, m)，把桿置於所預測的角度，然後分別對每個質點求解力的平衡。兩個質點所得的桿內力一致，而且是推力（thrust），張力則與公式相符，誤差約為 10^{-15}。

常見錯誤

- 把 G 放在距離 M 為 $\frac{2a}{3}$ 之處，或放在錯誤的一側。質心較接近較重的質點，與中點相距 $\frac{a}{3}$。
- 把 T_A 對 B 的力臂當作 $2a$ 或 b。所需的是由 B 到直線 OA 的垂直距離。
- 答案仍以 θ 表示，但題目要求以 m、g、a 和 b 表示。

STEP 之外

從一點自由懸掛的物體，靜止時質心必在該點的正下方；這個原理其實是一個更深刻事實的最簡單情況：穩定平衡使勢能（potential energy）取最小值，而這裏的勢能不過是 $3mg$ 乘以 G 的高度。到了大學，這會發展成虛功原理（virtual work principle）和拉格朗日力學（Lagrangian mechanics），當中求平衡位置的方法是對能量求導，而不是分解

力。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對剛體靜力學和能量方法有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。