詳細解答

STEP II 1994，第 8 題

純數學 • 二次模型的最優化

> **STEP II 1994，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q8

關鍵思路

追蹤一個送貨週期內的金錢流向。存貨以穩定的速率 r 減少，直至售罄為止，所以 $S(t)$ 只是一條簡單的斜線，而倉租就是 b 乘以這條斜線下的面積。於是每個週期的利潤是 X 的二次函數（quadratic）。在容許範圍 $0 < X \leq rT$ 內求它的最大值，便得出所需條件，而假設 $T \geq p/b$ 的作用，正是令拋物線（parabola）的頂點（vertex）落在這個範圍之內。

解答

為何 $X \leq rT$

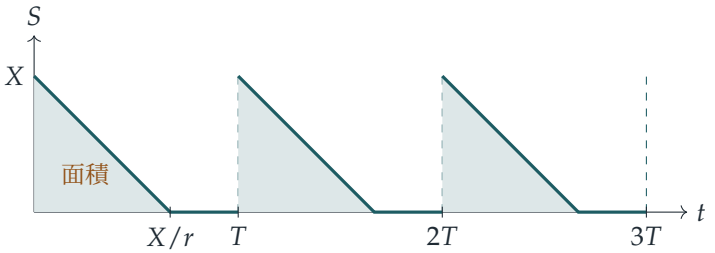
在 T 小時內，她最多只能賣出 rT 件貨。若 $X > rT$，下一輛貨車到達時，貨架上至少仍有 $X - rT$ 件貨。此後每個週期都會令這批賣不出的剩貨至少再增加 $X - rT$ 件，所以經過 n 個週期後，剩貨至少有 $n(X - rT)$ 件。這個數量會無止境地增長，按每件每小時 b 計算的倉租亦然。她要為這些貨品付款（還要付倉租），但它們不會帶來額外的銷售，因為每個週期的銷量無論如何都以 rT 為上限。因此每次訂貨多於 rT 只會增加成本，她應取 $X \leq rT$。

存貨量

當 $X \le rT$ 時，每個週期開始時恰好有 X 件貨。在連續模型（continuous model）中，只要有存貨，她便以速率 r 售貨，所以

$$S(t) = \begin{cases} X - rt, & 0 \le t \le X/r, \\ 0, & X/r \le t \le T. \end{cases}$$

圖像是一條直線，由 X 下降至 $t = X/r$ 時的零，然後保持在零，直到 $t = T$ 下一次送貨為止（屆時跳回 X）。經過數個週期，便形成鋸齒形的圖像。



每個週期的利潤

在長 T 小時的一個週期內：

- 銷售。全部 X 件貨都會售出（因為 $X \le rT$），每件售 £$(p+q)$，收入為 £$(p+q)X$。
- 送貨。£$(a+qX)$。
- 倉租。在一段短時間 δt 內存放 $S(t)$ 件貨的費用為 $bS(t)\,\delta t$，所以總數是

  $$b\int_0^T S(t)\,\mathrm{d}t = b\int_0^{X/r} (X - rt)\,\mathrm{d}t = b \cdot \tfrac{1}{2} \cdot X \cdot \frac{X}{r} = \frac{bX^2}{2r},$$

  即陰影三角形的面積乘以 b。
- 營運開支。£cT。

含 qX 的項互相抵銷，所以每個週期的利潤是

$$P(X) = pX - \frac{bX^2}{2r} - a - cT.$$

可見 p 才是每件貨的真正利潤：q 只是轉嫁給顧客而已。

生意何時可以有利可圖？

T 固定時，她可以在 $0 < X \le rT$ 的範圍內選擇 X。配方（completing the square）後，

$$P(X) = \frac{p^2 r}{2b} - a - cT - \frac{b}{2r}\left(X - \frac{pr}{b}\right)^2.$$

想一想 最佳的 X 真的在容許範圍之內嗎？

拋物線在 $X = pr/b$ 處達到最高點，而我們需要 $pr/b \leq rT$，即 $T \geq p/b$。這正是題目的假設。所以她可以選 $X = pr/b$，此時

$$P = \frac{p^2 r}{2b} - (a + cT).$$

這個值為正，當且僅當 $p^2 r > 2b(a + cT)$，即

$$p^2 > 2\,\frac{(a + cT)b}{r}.$$

因此，若這個不等式（inequality）成立，訂貨量 $X = pr/b$ 便能令生意有利可圖，這正是所要證明的。（事實上 pr/b 是最佳的選擇，所以當 $T \geq p/b$ 時，這個條件也是必要的。）

反之，若 $T < p/b$，頂點便落在 rT 之外。這時 P 在整個容許範圍內都是遞增的，她最多只能取 $X = rT$。這就是為何要得出這個條件，必須有關於 T 的假設。

驗算

- 取 $a = 10$、$b = 1$、$r = 10$、$p = 4$、$c = 1$、$T = 5$。則 $T \geq p/b = 4$，且 $p^2 = 16 > 2(15)(1)/10 = 3$。最佳訂貨量為 $X = 40 \leq rT = 50$，利潤為 $160 - 10 - 80 - 5 = 65 = \frac{16 \cdot 10}{2} - 15$。
- 電腦就 30 組隨機參數，以數值方法逐步計算一個週期內的 $S(t)$，結果與 $P(X)$ 相差不超過 10^{-7}。另就 2000 個滿足 $T \geq p/b$ 的隨機個案，對 X 作網格搜尋，證實最大值為 $\frac{p^2 r}{2b} - a - cT$。
- 單位：$p^2 r/b$ 的單位是 $(£/件)^2 \times (件/小時)/(£/件/小時) = £$，與 a 和 cT 相同。

常見錯誤

- 把全部 X 件貨在整整 T 小時內的倉租都計算在內（即 bXT），而不是按實際存貨量計算的 $b\int S\,\mathrm{d}t$。
- 忘記檢查 $X = pr/b$ 是否滿足 $X \leq rT$。整道題只有這一步用到條件 $T \geq p/b$。

STEP 之外

這是運籌學（operations research）中經典的經濟訂貨量（economic order quantity）模型。在每次訂貨的固定成本與每件貨每單位時間的存貨成本之間取得平衡，會得出一條

平方根法則。在本題中，若她還可以選擇 T，則要令利潤率 P/T 最大，便須在 a 與倉租之間作出取捨。這類約束優化（constrained optimisation）問題（這裏是頂點與邊界 $X = rT$ 之間的比較）進一步發展下去，便是線性規劃（linear programming）、非線性規劃（nonlinear programming）以及 Karush–Kuhn–Tucker 條件。若想養成建立和檢驗這類模型的習慣，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 是很好的參考書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。